UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken
Fredag 16. desember 1994
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*

Oppgave 1:

I denne oppgaven skal du se på Schrödinger-ligningen for en partikkel i et én-dimensjonalt anharmonisk potensial,

$$V(x) = x^{2n}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Etter passende skaleringer kan denne ligningen skrives

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^{2n} - \lambda\right] \psi(x) = 0. \tag{1}$$

a) Klassifisér ligning (1) etter singularitetenes antall og natur. (Anta at $\lambda > 0$.)

b) Sett $\lambda = 0$ og transformer i dette spesialtilfellet ligning (1) til "enklest mulig form", dvs. slik at summen av rangen til alle singularitetene er minst mulig.

c) Bestem de mulige ledende asymptotiske oppførsler til løsningene $\psi(x)$ når $x \to \infty$.

d) Skriv ned første ordens WKB kvantiseringsbetingelse for egenverdiproblemer av formen

$$\left[-\frac{1}{\epsilon^2}\frac{d^2}{dx^2} + Q(x;\lambda)\right] \psi(x) = 0,$$

med to klassiske vendepunkter, $Q(x, \lambda) = 0$ ved $x = x_\pm$.

e) Bestem i første ordens WKB tilnærmelse egenverdiene λ_m til problemet (1). (I dette tilfellet er utviklingsparameteren $\epsilon = 1$.)

Oppgitt:

$$\int_0^1 dt\, t^\alpha (1-t)^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Oppgave 2:
Bestem den ledende asymptotiske oppførsel for integralene

a)

$$I_1(a) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^a (1+t)^{-2a}, \quad \text{når } a \to \infty. \tag{2}$$

b)

$$I_2(a) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^a (1+t)^{-a}, \quad \text{når } a \to \infty. \tag{3}$$

c)

$$I_3(a) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^a (1+t)^{a}, \quad \text{når } a \to -1^+. \tag{4}$$

Oppgave 3:
I denne oppgaven skal du benytte grensesjiktmetoden til å løse randverdiproblemet

$$\varepsilon y'' - y' + \frac{1}{x} y = x, \quad \text{for } 1 < x < 2, \quad y(1) = y(2) = 0. \tag{5}$$

når $\varepsilon \to 0^+$.

a) Bestem mulig(e) posisjon(er) og tykkelse(r), dvs. hvordan tykkelsen skalerer med ε, for grensesjikt i løsningen.

b) Finn de ytre og indre løsningene til (5).

c) Finn en uniform tilnærmelse til løsningen $y(x)$.

Oppgave 4:
I denne oppgaven skal du analysere startverdiproblemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) + \varepsilon \dot{y}(t)^3 = \cos(t), \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0, \tag{6}$$

ved bruk av flerskalautvikling.

a) Skriv $y(t) = \varepsilon^\alpha Y(t,\tau)$, med $\tau = \varepsilon^\beta t$, og velg eksponentene α og β slik at du får en hensiktsmessig ligning for $Y(t,\tau)$.

b) Vis at nullte ordens løsning for denne ligningen kan skrives på formen

$$Y_0(t,\tau) = A_0(\tau)\sin t + B_0(\tau)\cos t, \tag{7}$$

og bestem startverdiene for $A_0(\tau)$ og $B_0(\tau)$ ved $\tau = 0$.

c) Bestem differensialligningene som det er naturlig å pålegge $A_0(\tau)$ og $B_0(\tau)$, og finn fra disse også størrelsene $A_0'(0)$ og $B_0'(0)$.

d) Ligningssettet i forrige punkt kan reduseres til en annen ordens ligning for kombinasjonen

$$R(\tau) \equiv A_0(\tau)^2 + B_0(\tau)^2.$$

Finn denne, og de tilhørende startbetingelsene for $R(\tau)$.

e) Bestem den asymptotiske oppførselen til $R(\tau)$ når $\tau \to \infty$. Finn de tilhørende asymptotiske oppførsler for $A_0(\tau)$ og $B_0(\tau)$.

NB! Forsøk *ikke* å finne en eksakt analytisk løsning til R-ligningen. Det er mulig å forstå den kvalitative oppførselen til $R(\tau)$ ved å tolke denne ligningen som bevegelsesligningen for en partikkel i et ytre potensial, og med et friksjonsledd.

Oppgitt:

$$(A\cos t - B\sin t)^3 = \frac{3}{4}(A^2+B^2)(A\cos t - B\sin t)$$
$$+\frac{1}{4}(A^2-3B^2)A\cos 3t + \frac{1}{4}(B^2-3A^2)B\sin 3t. \tag{8}$$