

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 73 59 36 53 (mobil 900 75 172)

Eksamen i fag FY8304/FY3107
Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken
Onsdag 7. desember 2016
Tid: 09:00–13:00

Sensurfrist: Lørdag 7. januar 2017

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske tabeller.

Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Oppgave 1:

- a) Hva menes med at et sett av differensialligninger er autonomt?
Hvordan kan et ikke-autonomt sett av ligninger gjøres autonomt?
- b) Vis at Hamilton-funksjonen H er en bevegelseskonstant i et autonomt system der koordinatene $q_j(t)$ og impulsene $p_j(t)$ for $j = 1, 2, \dots, n$ oppfyller Hamiltons ligninger

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

- c) I resten av denne oppgaven ser vi på følgende bevegelsesligninger:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2 - 1. \quad (1)$$

Finn fikspunktene, og klassifiser dem. Et fikspunkt kan være stabilt, ustabilt eller marginalt stabilt. Det kan være et sadelpunkt, en spiral, et senter eller en stjerne. Grunngi svarene.

- d) Vis at det finnes en såkalt homoklin bane, som nærmer seg et fikspunkt i grensen $t \rightarrow -\infty$, og som nærmer seg det samme fikspunktet i grensen $t \rightarrow +\infty$.
- e) Skissér et faseportrett av dette dynamiske systemet, det vil si typiske eksempler på hvordan punktet $(x(t), y(t))$ beveger seg i planet.
- f) Hva menes med en spontan singularitet, også kalt en flyttbar singularitet, til en løsning av en differensialligning?

Vis at noen av løsningene til ligningssystemet (1) har spontane singulariteter.

Oppgave 2:

a) Cauchys integralformel for en analytisk funksjon $f(z)$ sier at

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt \frac{f(t)}{t-z},$$

der C er en vilkårlig lukket kurve som går en gang rundt z i positiv omløpsretning (mot klokken). Bruk denne formelen til å vise at

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt \frac{e^t}{t^{n+1}}, \quad (2)$$

der C er en lukket kurve som går en gang rundt 0.

b) Sett $t = (n+1)s$ i integralet i ligning (2), det gir at

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i (n+1)^n} \oint_{C'} ds \left(\frac{e^s}{s}\right)^{n+1}, \quad (3)$$

der $C' = C/(n+1)$. Definer

$$g(s) = \left(\frac{e^s}{s}\right)^{n+1}.$$

Siden C' er en vilkårlig kurve rundt $s = 0$, kan vi la den gå gjennom et punkt $s = s_0$ der absoluttverdien av integranden, $|g(s)|$, har et sadelpunkt. Finn s_0 .

Når $g(s)$ er en analytisk funksjon av s , så er s_0 et sadelpunkt for $|g(s)|$ hvis $g'(s_0) = 0$ og $g''(s_0) \neq 0$. Du behøver ikke bevise denne påstanden her.

c) Bruk metoden med brattest nedstigning fra sadelpunktet (engelsk: steepest descent) til å finne den ledende asymptotiske oppførselen til integralet i ligning (3) når $n \rightarrow \infty$.

Du løser oppgaven enklest ved å tilnærme kurven for brattest nedstigning med en rett linje. Følgende formler kan vise seg nyttige:

$$1+x = e^{\ln(1+x)} = e^{x-\frac{x^2}{2}+\dots},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

Oppgave 3:

Gitt differensialligningen

$$y''(x) + \frac{1}{\sin x} y'(x) + \frac{1}{\cos x} y(x) = 0.$$

a) Finn de singulære punktene til ligningen, og klassifiser dem.

b) Finn den ledende asymptotiske oppførselen til $y(x)$ i hvert singulært punkt.

THE NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

Contact person:

Name: Jan Myrheim

Telephone: 73 59 36 53 (mobile 900 75 172)

Examination, course FY8304/FY3107
Mathematical approximation methods in physics

Wednesday December 7, 2016

Time: 09:00–13:00

Grades made public: Saturday January 7, 2017

Allowed to use: Calculator, mathematical tables.

All subproblems are given the same weight in the grading.

Problem 1:

- a) What does it mean that a set of differential equations is autonomous?

How can a non-autonomous set of equations be made autonomous?

- b) Show that the Hamiltonian H is a constant of motion in an autonomous system where the coordinates $q_j(t)$ and the momenta $p_j(t)$ for $j = 1, 2, \dots, n$ satisfy Hamilton's equations

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

- c) In the rest of this problem we consider the following equations of motion:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2 - 1. \quad (1)$$

Find the fixed points, and classify them. A fixed point may be stable, unstable, or marginally stable. It may be a saddle point, a spiral, a centre, or a star.

Give reasons for your answers.

- d) Show that there exists a so called homoclinic orbit, which approaches a fixed point in the limit $t \rightarrow -\infty$, and approaches the same fixed point in the limit $t \rightarrow +\infty$.
- e) Sketch a phase portrait of this dynamical system, that is, typical examples of how the point $(x(t), y(t))$ moves in the plane.
- f) What is meant by a spontaneous singularity, also called a movable singularity, of a solution of a differential equation?

Show that some of the solutions of the system of equations (1) have spontaneous singularities.

Problem 2:

- a) Cauchy's integral formula for an analytic function $f(z)$ says that

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt \frac{f(t)}{t-z},$$

where C is an arbitrary closed curve winding once around z in the positive (anticlockwise) direction. Use this formula to show that

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt \frac{e^t}{t^{n+1}}, \quad (2)$$

where C is a closed curve winding once around 0.

- b) Set $t = (n+1)s$ in the integral in equation (2), this gives that

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i (n+1)^n} \oint_{C'} ds \left(\frac{e^s}{s}\right)^{n+1}, \quad (3)$$

where $C' = C/(n+1)$. Define

$$g(s) = \left(\frac{e^s}{s}\right)^{n+1}.$$

Since C' is an arbitrary curve around $s = 0$, we may take it to pass through a point $s = s_0$ where the absolute value of the integrand, $|g(s)|$, has a saddle point. Find s_0 .

When $g(s)$ is an analytic function of s , then s_0 is a saddle point of $|g(s)|$ if $g'(s_0) = 0$ and $g''(s_0) \neq 0$. You need not prove this statement here.

- c) Use the method of steepest descent from the saddle point to find the leading asymptotic behaviour of the integral in equation (3) when $n \rightarrow \infty$.

You solve this problem in the simplest way by approximating the curve of steepest descent by a straight line. The following formulas may prove useful:

$$1+x = e^{\ln(1+x)} = e^{x-\frac{x^2}{2}+\dots},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

Problem 3:

Given the differential equation

$$y''(x) + \frac{1}{\sin x} y'(x) + \frac{1}{\cos x} y(x) = 0.$$

- a) Find the singular points of the equation, and classify them.
 b) Find the leading asymptotic behaviour of $y(x)$ at every singular point.