

## Fag DIF4943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

## LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 12.1.1999

1. I denne oppgaven skulle vi gjøre en lokal analyse av differensialligningen

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{x dx} + \frac{1}{x^4} \right] y(x) = 0. \quad (1)$$

(a) Ligning (1) har ett rang 2 irregulært singulært punkt i  $x = 0$  og ett regulært singulært punkt i  $x = \infty$ , og ingen andre singulære punkter.

(b) For å finne de mulige ledende asymptotiske oppførsler for  $y(x)$  når

i.  $x \rightarrow 0$   
innfører vi  $y = e^S$  og finner

$$S'^2 + S'' + \frac{1}{x} S' + \frac{1}{x^4} = 0. \quad (2)$$

Dominerende balanse er gitt ved  $S'^2 \sim -x^{-4}$ , dvs.

$$S' = \pm \frac{i}{x^2} + S'_1.$$

Gjeninnsatt i (2) gir dette

$$\pm 2ix^{-2} S'_1 \mp ix^{-3} + \mathcal{O}(x^{-2}) = 0,$$

dvs.  $S'_1 = \frac{1}{2x} + \dots$ . Etter integrasjon og eksponentiering gir dette

$$y(x) = \sqrt{x} \left\{ A_1 e^{i/x} [1 + \mathcal{O}(x)] + A_2 e^{-i/x} [1 + \mathcal{O}(x)] \right\}. \quad (3)$$

ii.  $x \rightarrow 1$   
benytter vi at løsningen har en konvergent rekkeutvikling i dette punktet, slik at

$$y(x) = B_0 + B_1(x-1) + \mathcal{O}((x-1)^2). \quad (4)$$

iii.  $x \rightarrow \infty$   
benytter vi at  $x = \infty$  er et regulært singulært punkt, og gjør ansatzen  $y = x^\nu + \dots$ . Dette fører til index-ligningen  $\nu^2 = 0$ , slik at

$$y(x) = C_0 + C_1 \log x + \mathcal{O}(x^{-1}). \quad (5)$$

**Kommentar:** Ved å innføre  $u = x^{-1}$ ,  $Y(u) = y(x)$  transformerer (1) over på Bessel-ligningen

$$\left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{d}{u du} + 1 \right] Y(u) = 0, \quad (6)$$

med generell løsning  $Y(u) = D_1 J_0(u) + D_2 Y_0(u)$ .

2. I denne oppgaven skulle vi analysere integralet

$$\mathcal{Z}_\nu(\beta) \equiv \int_0^\infty k^\nu dk e^{-\beta\sqrt{k^2+1}} \quad (7)$$

(a) når  $\beta \rightarrow 0^+$  med  $\nu > 0$  fast:

Hvis vi setter  $\beta = 0$  vil integralet divergere for store  $k$ , så hovedbidraget kommer fra store  $k$ . Vi kan derfor tilnærme  $\sqrt{k^2+1} = k + \frac{1}{2k} + \dots$ , og får

$$\mathcal{Z}_\nu(\beta) = \int_0^\infty k^\nu dk e^{-\beta k} \left( 1 - \frac{\beta}{2k} + \dots \right) = \Gamma(1+\nu) \beta^{-1-\nu} [1 + \mathcal{O}(\beta)]. \quad (8)$$

(b) når  $\beta \rightarrow \infty$  med  $\nu > -1$  fast:

Når  $\beta$  er stor blir eksponentialfunksjonen raskt liten når  $k$  øker. Så vi kan rekkeutvikle  $\sqrt{k^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}k^2 + \dots$ , og får

$$\begin{aligned} Z_\nu(\beta) &= e^{-\beta} \int_0^\infty k^\nu dk e^{-\beta k^2} (1 + \mathcal{O}(\beta k^4)) = \\ &2^{(\nu-1)/2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \beta^{(\nu+1)/2} e^{-\beta} [1 + \mathcal{O}(\beta^{-1})] \end{aligned} \quad (9)$$

(c) når  $\nu \rightarrow \infty$  med  $\beta > 0$  fast:

Maksimum for integranden vil forskyves mot store  $k$  når  $\nu$  øker, så hovedbidraget til integralet vil komme fra (et skarpt maksimum i integranden ved) store  $k$ . Svaret er derfor gitt som i ligning (8), men hvor vi i tillegg kan gjøre stor- $\nu$  utviklingen for  $\Gamma(1 + \nu)$ , dvs.

$$Z_\nu(\beta) \approx \sqrt{2\pi\nu} \nu^\nu e^{-\nu} \beta^{-1-\nu}. \quad (10)$$

(d) når  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow \infty$  med  $\zeta = \beta/\nu > 0$  fast:

Vi innfører

$$\phi(k) = \log k - \zeta \sqrt{k^2 + 1}, \quad (11)$$

slik at integralet kan skrives

$$Z_\nu(\nu\zeta) = \int_0^\infty dk e^{\nu\phi(k)}.$$

$\phi(k)$  har maksimum ved  $k = k_m$ , der

$$\phi'(k_m) = \frac{1}{k_m} - \frac{\zeta k_m}{\sqrt{k_m^2 + 1}} = 0,$$

dvs.

$$k_m^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\zeta^2}}{2\zeta^2}. \quad (12)$$

Da er

$$\phi''(k_m) = -k_m^{-2} - \zeta (k_m^2 + 1)^{-3/2} = -\frac{1 + \zeta^2 k_m^4}{\zeta^2 k_m^6} \quad (13)$$

Vi kan da tilnærme integralet som

$$Z_\nu(\nu\zeta) \approx e^{\nu\phi(k_m)} \int dk e^{\nu\phi''(k_m)(k-k_m)^2/2} = e^{\nu\phi(k_m)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\nu\phi''(k_m)}}. \quad (14)$$

Merk at vi kan skrive  $\phi(k_m) = \log k_m - \zeta^2 k_m^2$  fordi  $\sqrt{k_m^2 + 1} = \zeta k_m^2$ . Da kan vi skrive

$$Z_\nu(\nu\zeta) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \left( \frac{\zeta^2 k_m^6}{1 + \zeta^2 k_m^4} \right)^{1/2} k_m^\nu e^{-\nu\zeta^2 k_m^2} \quad (15)$$

Det har liten hensikt å sette inn eksplisitt for  $k_m$ .

**Kommentar:** Integralet (7) kan uttrykkes analytisk. Ved å innføre  $k = \sinh \xi$ , dvs.  $dk = \cosh \xi d\xi$  og  $\sqrt{k^2 + 1} = \cosh \xi$ , får vi

$$\begin{aligned} Z_\nu(\beta) &= \int_0^\infty d\xi \cosh \xi \sinh^\nu \xi e^{-\beta \cosh \xi} = -\frac{d}{d\beta} \int_0^\infty d\xi \sinh^\nu \xi e^{-\beta \cosh \xi} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu/2} K_{\nu/2}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu/2} K_{1+\nu/2}(\beta). \end{aligned} \quad (16)$$

3. I denne oppgaven skulle vi se på summen

$$Z(\beta; a) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{n^2+a^2}}. \quad (17)$$

(a) når  $\beta \rightarrow \infty$  med  $a > 0$  fast:

Når  $\beta$  er stor vil summanden miske raskt med voksende  $n$ , så det er tilstrekkelig å ta med det første leddet i summen

$$Z(\beta; a) \approx e^{-\beta a}. \quad (18)$$

(b) når  $a \rightarrow \infty$  med  $\beta > 0$  fast:

Vi kan rekkeutvikle,  $\sqrt{n^2+a^2} \approx a + \frac{n^2}{2a}$ . Videre vil summanden forandre seg langsomt med  $n$ , slik at vi kan erstatte summasjonen med integrasjon

$$Z(\beta; a) \approx e^{-\beta a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n^2/2a} \approx e^{-\beta a} \int_0^{\infty} dn e^{-\beta n^2/2a} = \sqrt{\frac{\pi a}{2\beta}} e^{-\beta a}. \quad (19)$$

(c) når  $\beta \rightarrow 0^+$  med  $a > 0$  fast:

Summen får sitt største bidrag fra store  $n$ , så vi kan gjøre rekkeutviklingen  $\sqrt{n^2+a^2} = n + \frac{a^2}{2n} + \dots$ . Da får vi

$$\begin{aligned} Z(\beta; a) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\beta\sqrt{a^2+n^2}} + \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\beta n} \left(1 - \frac{\beta a^2}{2n} + \dots\right) \\ &= N + \frac{e^{-N\beta}}{1 - e^{-\beta}} + \frac{\beta a^2}{2} \log(1 - e^{-\beta}) + \mathcal{O}(\beta) \end{aligned} \quad (20)$$

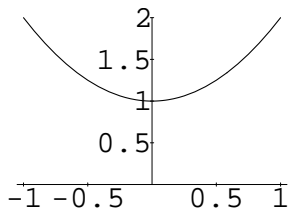
$$= \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta a^2 \log \beta + \mathcal{O}(\beta). \quad (21)$$

4. I denne oppgaven skulle vi se på randverdiproblemet

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + y(x) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 1 \quad (22)$$

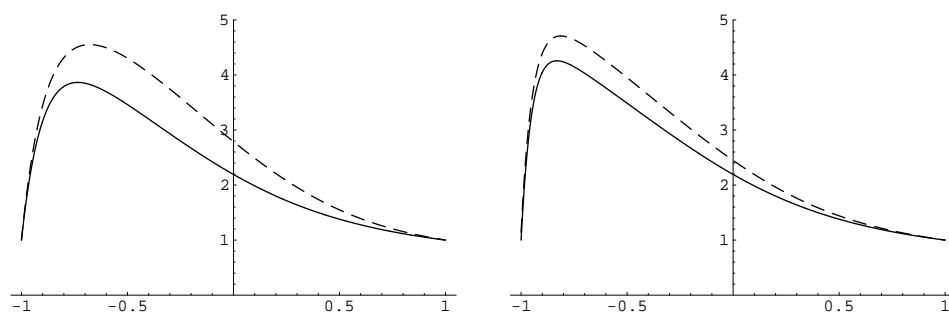
i grensen  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , dvs. finne i hvilke posisjoner får vi grensesjikt, og hvordan tykkelsen av disse skalerer med  $\varepsilon$ .

(a) Når  $a(x) = 1 + x^2$ , som på figuren under

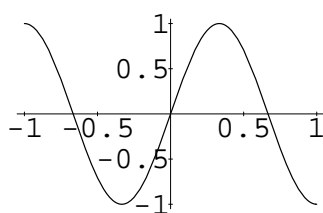


får vi etter de generelle reglene et grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x = -1$ . (Siden  $a(x) \neq 0$  i det aktuelle intervallet  $(-1, 1)$  kan vi ikke ha indre grensesjikt. Siden videre  $a(x) > 0$  er det bare konsistent å ha grensesjiktet ved venstre rand.)

**Kommentar:** Vi kan teste denne konklusjonen mot numerisk løsning av problemet, som i figuren under for henholdsvis  $\varepsilon = 0.2$  og  $\varepsilon = 0.1$ . De stiplede kurvene viser den numeriske løsningen, de heltrukne kurvene viser den uniforme tilnærmingen.

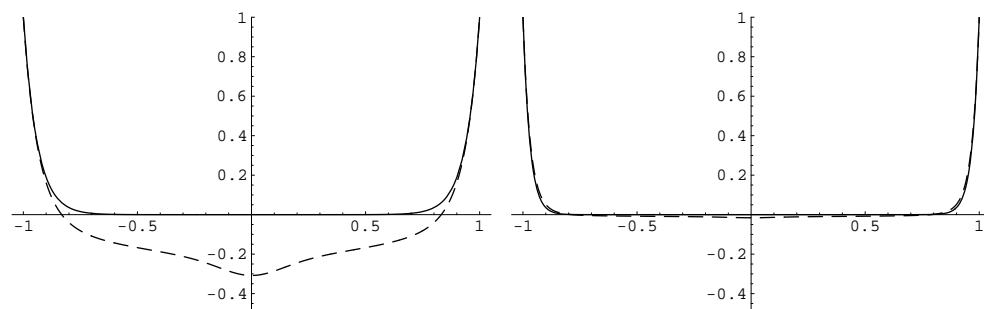


(b) Når  $a(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$ , som på figuren under

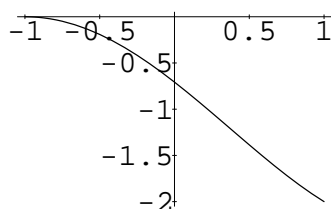


får vi etter de generelle reglene grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x = -1$  og  $x = 1$ , med  $y(x) \approx 0$  inne i intervallet  $(-1, 1)$ . (Siden  $a(-1) > 0$  og  $a(1) < 0$  er begge endepunktene tillatte posisjoner for grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$ . Siden  $a(0) = 0$ , med  $a'(0) > 0$ , er dette en tillatt posisjon for et indre grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$ . Men siden  $a(\pm\frac{2}{3}) = 0$ , med  $a'(\pm\frac{2}{3}) < 0$  vil vi få indre løsninger som vokser eksponensielt når  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,— dersom ikke  $y(\pm\frac{2}{3}) \approx 0$ .)

**Kommentar:** Vi kan teste denne konklusjonen mot en numerisk løsning av problemet, som i figuren under for henholdsvis  $\varepsilon = 0.06$  og  $\varepsilon = 0.03$ . De stiplede kurvene viser den numeriske løsningen, de heltrukne kurvene viser den uniforme tilnærmingen. Vi må ha ganske liten  $\varepsilon$  før grensesjikt-løsningen begynner å bli god.



(c) Når  $a(x) = -(1+x)\sin[\frac{\pi}{4}(1+x)]$ , som på figuren under



kan vi etter de generelle reglene ha et grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x = 1$ . Punktet  $x = -1$  må analyseres videre, siden  $a(x)$  har en dobbeltrot der. Den ytre ligningen blir

nær  $x = -1$

$$y'(x) \approx \frac{4}{\pi} \frac{1}{(x+1)^2} y(x), \quad (23)$$

med løsning

$$y(x) \sim C \exp\left(-\frac{4}{\pi} \frac{1}{x+1}\right) \rightarrow 0 \text{ når } x \rightarrow -1^+. \quad (24)$$

Det er derfor ikke mulig å oppfylle venstre randbetingelse med den ytre løsningen alene, så vi må ha en form for grensesjikt ved  $x = -1$  også. For å analysere oppførselen her innfører vi indre variable

$$X = (x+1)/\delta, \quad Y(X) = y(x+1),$$

og finner vi til ledende orden ved  $x = -1$ :

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y''(X) + \delta X^2 Y'(X) + Y(X) = 0. \quad (25)$$

Vi finner at dominerende balanse kan opptre mellom første og tredje ledd i denne ligningen, med  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ . Dette gir en indre løsning av formen

$$Y(X) = \cos X + C \sin X, \quad (26)$$

som altså ikke svarer til et grensesjikt av konvensjonell type, men er oscillerende av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$ .

**Kommentar:** For å analysere oscillasjons-området i mer detalj kan vi transformere ligningen til standard WKB form nær  $x = -1$

$$\varepsilon^2 f''(x) + Q(x)f(x) = 0,$$

ved å innføre

$$y(x) = \exp\left[\frac{\pi}{24\varepsilon}(x+1)^2\right] f(x).$$

Dette gir

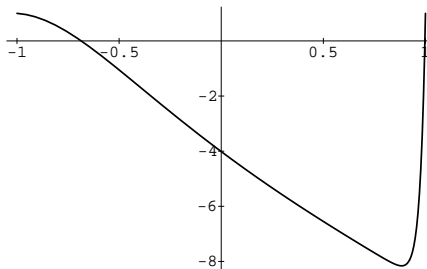
$$\varepsilon f'' + \left[1 - \frac{\pi^2}{32\varepsilon}(x+1)^2 + \dots\right] f = 0. \quad (27)$$

Overgangen fra oscillerende til eksponensiell oppførsel skjer altså ved vendepunktet ( $Q(x) = 0$ )

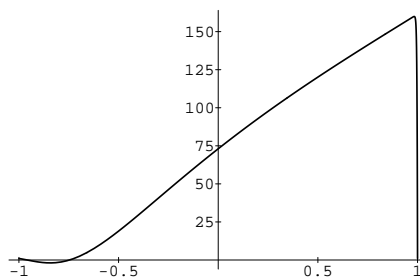
$$x+1 = \frac{4}{\pi} \sqrt{2\varepsilon}. \quad (28)$$

Løsningen er altså oscillerende opp til dette punktet, og vil generelt vokse eksponensielt med  $\varepsilon^{-1}$  til høyre for det.

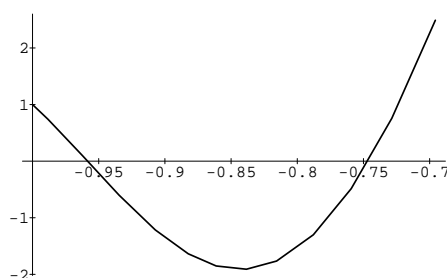
Det er en stor numerisk utfordring å teste disse konklusjonene mot numerisk løsning av problemet, men et begynnende mønster kommer til syne ettersom vi minsker  $\varepsilon$ . For  $\varepsilon = 0.05$  (som svarer til et WKB vendepunkt ved  $x = -0.597$ ) blir løsningen som i figuren under:



Det oscillerende grensesjiktet er ikke spesielt tydelig over, siden det høyst kan sies å inneholde en halv oscillasjon. For  $\varepsilon = 0.001$  (som svarer til et WKB vendepunkt ved  $x = -0.943$ ) blir den numeriske løsningen som i figuren under



Selv om ikke oscillasjoner er det mest prominente trekk ved denne figuren heller, ser vi indikasjoner på at det er i ferd med å utvikle seg en struktur nær  $x = -1$ . Når vi bare fokuserer oppmerksomheten på dette området finner vi omtrent én oscillasjon:



- (d) For en mer detaljert analyse av ligning (22), med  $a(x) = 1 + x^2$ , finner vi i det ytre området,  $x \in (-1 + \mathcal{O}(\varepsilon), 1)$  ligningen

$$(1 + x^2)y'_{\text{ytre}}(x) + y_{\text{ytre}}(x) = 0, \quad y_{\text{ytre}}(1) = 1, \quad (29)$$

med ytre løsning

$$y_{\text{ytre}}(x) = \exp(\arctan(1) - \arctan(x)). \quad (30)$$

Vi ser at for denne løsningen gjelder  $y_{\text{ytre}}(-1) = \exp(2 \arctan(1)) = e^{\pi/2}$ . I det indre området,  $x \in (-1, \mathcal{O}(\varepsilon))$ , innfører vi  $X = (x + 1)/\varepsilon$ ,  $Y(X) = y(x)$ , og finner ligningen

$$Y''(X) + 2Y'(X) = 0, \quad Y(0) = 1, \quad Y(\infty) = e^{\pi/2}, \quad (31)$$

med indre løsning

$$y_{\text{indre}}(x) = Y(X) = e^{-2X} + e^{\pi/2} (1 - e^{-2X}). \quad (32)$$

I matching-området,  $(1 + x) \rightarrow 0^+$  og  $(1 + x)/\varepsilon \rightarrow \infty$  når  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , er både den indre og den ytre løsningen lik  $y_{\text{match}}(1) = e^{\pi/2}$ . Den uniforme tilnærmingen blir derfor

$$\begin{aligned} y_{\text{uniform}}(x) &= y_{\text{ytre}}(x) + y_{\text{indre}}(x) - y_{\text{match}}(x) = \\ &= (1 - e^{\pi/2}) e^{-2(x+1)/\varepsilon} + e^{\pi/4} e^{-\arctan x}. \end{aligned} \quad (33)$$

Denne løsningen svarer til de heltrukne kurvene plottet over — jfr. punkt (a).

5. I denne oppgaven skulle vi bruke flerskalautvikling til å analysere startverdi-problemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \varepsilon \sin 2t y(t), \quad (34)$$

når  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  og  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 1$ .

- (a) Innfører tidsskalaer
- $t$
- og
- $\tau = \varepsilon t$
- , med
- $y(t) = Y(t, \tau)$
- . Da få vi

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) Y(t, \tau) + Y(t, \tau) = \varepsilon \sin 2t Y(t, \tau). \quad (35)$$

- (b) Vi utvikler
- $Y(t, \tau)$
- i en rekke i
- $\varepsilon$
- ,
- $Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots$
- . Til nullte orden i
- $\varepsilon$
- reduserer ligning (35) seg til

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) Y_0(t, \tau) = 0, \quad (36)$$

med generell løsning

$$Y_0(t, \tau) = A_+(\tau) e^{it} + A_-(\tau) e^{-it}. \quad (37)$$

- (c) Vi ser så på ligning (35) til orden
- $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) Y_1(t, \tau) &= \left( \sin 2t - 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} \right) Y_0(t, \tau) = \\ &= \left( \frac{1}{2i} A_- - 2i A'_+ \right) e^{it} - \left( \frac{1}{2i} A_+ - 2i A'_- \right) e^{-it} + \text{ikke-sekulære ledd.} \end{aligned} \quad (38)$$

De ikke-sekulære leddene er proporsjonale med  $e^{\pm 3t}$ . Vi ønsker at de sekulære leddene skal forsvinne, dvs. at

$$4A'_+ + A_- = 0, \quad 4A'_- + A_+ = 0, \quad (39)$$

eller

$$16A''_+ - A_+ = 0, \quad 16A''_- - A_- = 0. \quad (40)$$

- (d) Den generelle løsningen til (39) er

$$A_+(\tau) = a_+ e^{\tau/4} + a_- e^{-\tau/4}, \quad A_-(\tau) = -a_+ e^{\tau/4} + a_- e^{-\tau/4}.$$

Startbetingelsene gir ligningene

$$\begin{aligned} y(0) &= A_+(0) + A_-(0) = 1, \\ y'(0) &= i [A_+(0) - A_-(0)] + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

med løsning

$$A_+(0) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad A_-(0) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

eller

$$a_+ = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad a_- = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (41)$$

Dette gir tilslutt

$$y(t) = e^{-\tau/4} \cos t + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (42)$$

Figuren under viser en numerisk løsning av problemet, sammenlignet med den langsomt varierende amplituden  $e^{-\tau/4}$  for  $\varepsilon = 0.025$ . Som man ser er overensstemmelsen god. Men vi bør likevel forvente at løsningen blir kvalitativt forskjellig for svært store  $t$ , fordi en  $a_+$  av orden  $\varepsilon$  etterhvert vil føre til en eksponensielt voksende amplitude. Dette krever at vi løser problemet til orden  $\varepsilon$ .

