NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Eksamen i FY3403 PARTIKKELFYSIKK

Tirsdag 14. desember 2004
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til NTNU liste).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*

Sensur legges ut på fagets webside,
`http://web.phys.ntnu.no/~kolausen/FY3403/`,
såsnart den er klar.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1. Δ–resonansene

a) Beskriv de laveste spinn–$\frac{3}{2}$ tilstandene man kan lage av tre kvarker fra første generasjon (dvs. av u– og d–kvarker). Angi kvarkinnhold, navn og ladning for hver tilstand.

b) Tilstandene i forrige punkt kan klassifiseres som en isospinn multiplett. Angi isospinn klassifiseringen, $|I\, I_z\rangle$, for hver tilstand.

c) Disse tilstandene er ganske ustabile, de viktigste henfallsmodene for f.eks. Δ^+ er

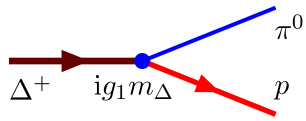
$$\Delta^+ \to \pi^0 + p \quad \text{og} \quad \Delta^+ \to \pi^+ + n.$$

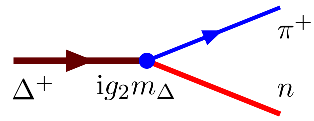
Angi for de to tilfellene isospinn klassifiseringen $|I_1 I_{1z}\rangle\, |I_2 I_{2z}\rangle$ av tilstanden på høyresiden, der 1 refererer til pionet og 2 til nukleonet.

d) På grunn av isospinn symmetri vil amplituden for henfallsraten være proporsjonal med overlappet mellom $|I\, I_z\rangle$ til starttilstanden og $|I_1 I_{1z}\rangle\, |I_2 I_{2z}\rangle$ til sluttilstanden. Bruk tabellene vedlagt sist i oppgavesettet til å finne dette overlappet i de to tilfellene.

e) Hva er den relative hyppigheten av de to henfallsmodene?

f) En forenklet modell for disse to henfallene er gitt ved Feynmanreglene nedenfor





der altså den numeriske verdien tilordnet henfallsknutene er henholdsvis $\mathrm{i}g_1 m_\Delta$ og $\mathrm{i}g_2 m_\Delta$.
Hva må forholdet mellom g_1 og g_2 være for at Feynmanreglene skal gi henfallsrater som er konsistent med isospinn symmetri? Vi setter $m_{\pi^+} = m_{\pi^0}$ og $m_p = m_n$.

g) Hva blir bevegelsesmengden $|\boldsymbol{p}_\pi|$ til pionet når et Δ^+ i ro henfaller? Regn med "naturlige enheter", dvs. enheter der $\hbar = c = 1$.

Oppgitt: $m_\Delta = 1232$ MeV, $m_p = 939$ MeV, $m_\pi = 139$ MeV (i naturlige enheter).

h) Det er eksperimentelt kjent at den totale vidden til Δ-resonansene er $\Gamma_\Delta = 120$ MeV. Bruk dette resultatet til å bestemme g_1 og g_2. (Du kan anta at begge parametrene er reelle og positive.)

Oppgitt: For henfall til to partikler er sammenhengen mellom partiell henfallsrate Γ_{fi} og amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ gitt som

$$\Gamma_{fi} = \frac{|\boldsymbol{p}_f|}{8\pi M_i^2}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2, \tag{1}$$

der M_i er massen til den partikkelen (i ro) som henfaller, og $\boldsymbol{p}_f$ er bevegelsesmengden til en av partiklene i sluttilstanden.

Oppgave 2. Nedbremsing av kosmiske protoner med veldig høy energi

I kosmisk stråling er det observert protoner med energi opptil 10^{20} eV. Det er samtidig kjent at protoner med *veldig* høy energi vil bli bremset ned på grunn av kollisjoner med fotoner fra "3-graders strålingen" i universet. De viktigste prosessene for denne nedbremsingen er π-produksjon, spesielt prosessene

$$\gamma + p \to \Delta^+ \to \pi^0 + p \quad \text{og} \quad \gamma + p \to \Delta^+ \to \pi^+ + n. \tag{2}$$

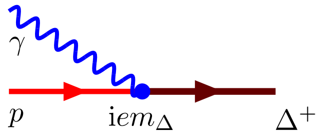
der Δ^+ partikkelen er virtuell (dvs. representert ved sin propagator).

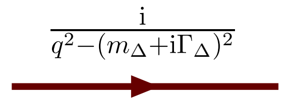
a) Anta at "3-graders strålingen" består av fotoner γ med energi $\omega = 7 \times 10^{-4}$ eV og isotrop retningsfordeling.

Hvor stor må energien til et høyenergetisk proton være for at prosessen $\gamma + p \to \pi^0 + p$ skal være mulig?

b) Hvor stor må energien være for at prosessen $\gamma + p \to \Delta^+$ skal være mulig?

c) Vi antar nå at Feynmanreglene for $\gamma p\Delta^+$–knutepunktet og Δ^+–propagatoren er som nedenfor





Her er e positronladningen, og m_Δ og Γ_Δ henholdsvis massen og vidden til Δ, som oppgitt i punkt **1g)**.

Tegn Feynmandiagrammene for prosessene (2).

d) Anta at protonet har en firervektor $p = E\,(1, 0, 0, 1)$ (energien er så stor at vi kan neglisjere protonets masse) og fotonet en firervektor $k = \omega\,(1, -\sin\vartheta, 0, -\cos\vartheta)$.

Skriv ned amplitudene $\mathcal{M}_{fi}$ for prosessene (2).

e) For å beregne tverrsnittene til disse prosessene er det best å gå til massesentersystemet. Skisser hvordan du vil gå fram for å finne energiene ω^c og E^c til henholdsvis foton og proton i massesentersystemet (når ω, E, og $\cos\vartheta$ er kjent).

Oppgave 3.

Den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^{++} med spinn $S_z = \frac{3}{2}$ er gitt som

$$|\Delta^{++}\ \tfrac{3}{2}\rangle = |u\uparrow\rangle|u\uparrow\rangle|u\uparrow\rangle.$$

a) Finn den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^+ med spinn $S_z = \frac{3}{2}$.

b) Finn den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^+ med spinn $S_z = \frac{1}{2}$.

c) Det magnetiske momentet til et baryon med spinn-flavor bølgefunksjon $|\Psi\rangle$ er definert som

$$\mu_z = \langle\Psi\,|\sum_i \frac{e\,\boldsymbol{Q}_i}{2\boldsymbol{m}_i}\,\boldsymbol{S}_{iz}\,|\,\Psi\rangle, \tag{3}$$

der summen er over de tre posisjonene i bølgefunksjonen. (Merk at $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{m}_i$ og $\boldsymbol{S}_{iz}$ er *operatorer* som tar forskjellige verdier avhengig av hvilke tilstander de virker på.)
Finn det magnetiske momentet til Δ^{++} med spinn $S_z = \frac{3}{2}$. Angi svaret i enheter av kjernemagnetonen, $\mu_{\mathrm{km}} = \frac{e}{2m_p}$.

Oppgitt: Du kan anta at $m_u = m_d = 336$ MeV.

d) Finn det magnetiske momentet til Δ^+ med spinn $S_z = \frac{1}{2}$.

Tips til punkt a–b): Bruk stigeoperatorene.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.

Notation: columns headed J over M; rows labelled m_1 m_2; entries are the Coefficients.

$$Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_1^1=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right) \qquad Y_2^1=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi} \qquad Y_2^2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m}=(-1)^m Y_\ell^{m*} \qquad d^{\,\ell}_{m,0}=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m}=(-1)^{m-m'}d^{\,j}_{m,m'}=d^{\,j}_{-m,-m'}$$

1/2×1/2

m_1	m_2	J=1, M=+1
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	J=1, M=0	J=0, M=0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=1, M=−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	J=3/2, M=+3/2
+1	+1/2	1

m_1	m_2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	J=3/2, M=−3/2
−1	−1/2	1

2×1/2

m_1	m_2	J=5/2, M=+5/2
+2	+1/2	1

m_1	m_2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	J=2, M=+2
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	J=2, M=0	J=1, M=0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	J=2, M=−2
−3/2	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	J=3, M=+3
+2	+1	1

m_1	m_2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	J=3, M=−3
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	J=2, M=+2
+1	+1	1

m_1	m_2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=2, M=−2
−1	−1	1

3/2×1

m_1	m_2	J=5/2, M=+5/2
+3/2	+1	1

m_1	m_2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−5/2
−3/2	−1	1

3/2×3/2

m_1	m_2	J=3, M=+3
+3/2	+3/2	1

m_1	m_2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1	m_2	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=3, M=−3
−3/2	−3/2	1

2×3/2

m_1	m_2	J=7/2, M=+7/2
+2	+3/2	1

m_1	m_2	J=7/2, M=+5/2	J=5/2, M=+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m_1	m_2	J=7/2, M=+3/2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1	m_2	J=7/2, M=+1/2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1	m_2	J=7/2, M=−1/2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1	m_2	J=7/2, M=−3/2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1	m_2	J=7/2, M=−5/2	J=5/2, M=−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m_1	m_2	J=7/2, M=−7/2
−2	−3/2	1

2×2

m_1	m_2	J=4, M=+4
+2	+2	1

m_1	m_2	J=4, M=+3	J=3, M=+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=4, M=+2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	J=4, M=+1	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	J=4, M=0	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1	m_2	J=4, M=−1	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	J=4, M=−2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	J=4, M=−3	J=3, M=−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=4, M=−4
−2	−2	1

$$d^{\,1}_{0,0}=\cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2}=\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1/2}_{1/2,-1/2}=-\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,1}_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0}=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{\,1}_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,3/2}_{3/2,1/2}=-\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,3/2}_{3/2,-1/2}=\sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,3/2}_{1/2,1/2}=\frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,3/2}_{1/2,-1/2}=-\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,2}_{2,2}=\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^{\,2}_{2,1}=-\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^{\,2}_{2,0}=\frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-1}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^{\,2}_{2,-2}=\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{\,2}_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1) \qquad d^{\,2}_{1,0}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta \qquad d^{\,2}_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{\,2}_{0,0}=\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.