NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i FY3403 PARTIKKELFYSIKK

Tirsdag 14. desember 2004

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1. Δ–resonansene

a) Beskriv de laveste spinn–$\frac{3}{2}$ tilstandene man kan lage av tre kvarker fra første generasjon (dvs. av u– og d–kvarker). Angi kvarkinnhold, navn og ladning for hver tilstand.

Se tabellen i neste punkt.

b) Tilstandene i forrige punkt kan klassifiseres som en isospinn multiplett. Angi isospinn klassifiseringen, $|I\, I_z\rangle$, for hver tilstand.

Navn	Kvarkinnhold	Ladning	$\lvert I \quad I_z\rangle$
Δ^{++}	uuu	2	$\lvert\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\rangle$
Δ^{+}	uud	1	$\lvert\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle$
Δ^{0}	udd	0	$\lvert\frac{3}{2} \; -\frac{1}{2}\rangle$
Δ^{-}	ddd	-1	$\lvert\frac{3}{2} \; -\frac{3}{2}\rangle$

c) Disse tilstandene er ganske ustabile, de viktigste henfallsmodene for f.eks. Δ^+ er

$$\Delta^+ \to \pi^0 + p \quad \text{og} \quad \Delta^+ \to \pi^+ + n.$$

Angi for de to tilfellene isospinn klassifiseringen $|I_1 I_{1z}\rangle\, |I_2 I_{2z}\rangle$ av tilstanden på høyresiden, der 1 refererer til pionet og 2 til nukleonet.

$$|\pi^0\, p\rangle = |1\, 0\rangle\, |\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}\rangle \tag{1}$$

$$|\pi^+\, n\rangle = |1\, 1\rangle\, |\tfrac{1}{2} \; -\tfrac{1}{2}\rangle \tag{2}$$

d) På grunn av isospinn symmetri vil amplituden for henfallsraten være proporsjonal med overlappet mellom $|I\, I_z\rangle$ til starttilstanden og $|I_1 I_{1z}\rangle\, |I_2 I_{2z}\rangle$ til sluttilstanden. Bruk tabellene vedlagt sist i oppgavesettet til å finne dette overlappet i de to tilfellene.

Vi leser ut av tabellen for $\mathbf{1} \times \mathbf{\frac{1}{2}}$ at

$$|\tfrac{3}{2}\; \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\; |1\ 1\rangle\; |\tfrac{1}{2}\; -\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\; |1\ 0\rangle\; |\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}\rangle. \tag{3}$$

Overlappet er altså $\sqrt{\frac{2}{3}}$ for $|\pi^0\, p\rangle$ og $\sqrt{\frac{1}{3}}$ for $|\pi^+\, n\rangle$.

e) Hva er den relative hyppigheten av de to henfallsmodene?

Henfall til $\pi^0 + p$ vil skje dobbelt så ofte som til $\pi + n$.

f) En forenklet modell for disse to henfallene er gitt ved Feynmanreglene nedenfor

der altså den numeriske verdien tilordnet henfallsknutene er henholdsvis $ig_1 m_\Delta$ og $ig_2 m_\Delta$.
Hva må forholdet mellom g_1 og g_2 være for at Feynmanreglene skal gi henfallsrater som er konsistent med isospinn symmetri? Vi setter $m_{\pi^+} = m_{\pi^0}$ og $m_p = m_n$.

Siden $\Gamma_i \propto |\mathcal{M}_i|^2 \propto g_i^2$ må $g_1/g_2 = \sqrt{2}$. Vi kan derfor skrive $g_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,g$ og $g_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}\,g$.

g) Hva blir bevegelsesmengden $|\boldsymbol{p}_\pi|$ til pionet når et Δ^+ i ro henfaller? Regn med "naturlige enheter", dvs. enheter der $\hbar = c = 1$.

Oppgitt: $m_\Delta = 1232$ MeV, $m_p = 939$ MeV, $m_\pi = 139$ MeV (i naturlige enheter).

Vi bruker konservering av firerimpuls, $p_\Delta = p_\pi + p_p$. I massesentersystemet har vi, siden $\boldsymbol{p}_p = -\boldsymbol{p}_\pi$,

$$m_\Delta^2 = p_\Delta^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi\, p_p = m_\pi^2 + m_p^2 + 2(E_p E_\pi + \boldsymbol{p}_\pi^2),$$

eller

$$\left(m_\Delta^2 - m_\pi^2 - m_p^2 - 2\boldsymbol{p}_\pi^2\right)^2 = 4(m_\pi^2 + \boldsymbol{p}_\pi^2)\,(m_p^2 + \boldsymbol{p}_\pi^2).$$

Dvs.

$$|\boldsymbol{p}_\pi| = \frac{1}{2m_\Delta}\sqrt{m_\Delta^4 + m_\pi^4 + m_p^4 - 2m_\Delta^2 m_p^2 - 2m_\Delta^2 m_\pi^2 - 2m_p^2 m_\pi^2} = 226.8 \text{ MeV}. \tag{4}$$

h) Det er eksperimentelt kjent at den totale vidden til Δ-resonansene er $\Gamma_\Delta = 120$ MeV. Bruk dette resultatet til å bestemme g_1 og g_2. (Du kan anta at begge parametrene er reelle og positive.)

Oppgitt: For henfall til to partikler er sammenhengen mellom partiell henfallsrate Γ_{fi} og amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ gitt som

$$\Gamma_{fi} = \frac{|\boldsymbol{p}_f|}{8\pi M_i^2}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2, \tag{5}$$

der M_i er massen til den partikkelen (i ro) som henfaller, og $\boldsymbol{p}_f$ er bevegelsesmengden til en av partiklene i sluttilstanden.

Vi finner

$$\Gamma_\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{p}_\pi|\,(g_1^2 + g_2^2) = \frac{1}{8\pi}\,|\boldsymbol{p}_\pi|\,g^2.$$

Dvs. at

$$g = \sqrt{8\pi\frac{\Gamma_\Delta}{|\boldsymbol{p}_\pi|}} = 3.65, \quad g_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,g = 2.98, \quad g_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}\,g = 2.11. \tag{6}$$

Oppgave 2. Nedbremsing av kosmiske protoner med veldig høy energi

I kosmisk stråling er det observert protoner med energi opptil 10^{20} eV. Det er samtidig kjent at protoner med *veldig* høy energi vil bli bremset ned på grunn av kollisjoner med fotoner fra "3-graders strålingen" i universet. De viktigste prosessene for denne nedbremsingen er π-produksjon, spesielt prosessene

$$\gamma + p \to \Delta^+ \to \pi^0 + p \quad \text{og} \quad \gamma + p \to \Delta^+ \to \pi^+ + n. \tag{7}$$

der Δ^+ partikkelen er virtuell (dvs. representert ved sin propagator).

a) Anta at "3-graders strålingen" består av fotoner γ med energi $\omega = 7 \times 10^{-4}$ eV og isotrop retningsfordeling.

Hvor stor må energien til et høyenergetisk proton være for at prosessen $\gamma + p \to \pi^0 + p$ skal være mulig?

I massesentersytemet må vi minst ha tilstrekkelig energi til å produsere et proton og et pion i ro. Dette kan uttrykkes på invariant form,

$$s = (p_\gamma + p_p)^2 = m_p^2 + 2p_\gamma p_p \geq (m_p + m_\pi)^2.$$

Det beste er at fotonet kolliderer "front mot front" med protonet, dvs. $p_\gamma = (\omega, 0, 0, -\omega)$, $p_p \approx (E_p, 0, 0, E_p)$, og

$$s \approx m_p^2 + (\omega + E_p)^2 - (\omega - E_p)^2 = m_p^2 + 4\omega E_p \geq m_p^2 + m_\pi(m_\pi + 2m_p).$$

Altså må

$$E_p \geq \frac{m_\pi(m_\pi + 2m_p)}{4\omega} = 1.0 \cdot 10^{20} \text{ eV}. \tag{8}$$

Kommentar: Merk at tilnærmingen $p_p \approx (E_p, 0, 0, E_p)$, som man kanskje ville tro er svært god når $E_p \approx 10^{11}\, m_p$, ikke må gjøres for tidlig! Hvis vi setter $p_p + p_\gamma \approx (E_p + \omega, 0, 0, E_p - \omega)$ fås

$$s \approx (E_p + \omega)^2 - (E_p - \omega)^2 = 4E_p\omega,$$

som avviker fra det riktige med leddet m_p^2.

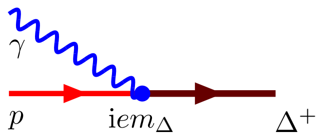
b) Hvor stor må energien være for at prosessen $\gamma + p \to \Delta^+$ skal være mulig?

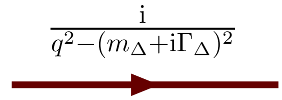
Vi finner ved tilsvarende regning som over at vi må ha

$$E_p \geq \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{4\omega} = 2.27 \cdot 10^{20} \text{ eV}. \tag{9}$$

Kommentar: På grunn av denne nedbremsingseffekten burde man observere svært få partikler med energi over ca. 10^{20} eV. Det interessante og litt mystiske er at dette ikke ser ut til å gjenspeile seg i observert kosmisk stråling!

c) Vi antar nå at Feynmanreglene for $\gamma p \Delta^+$–knutepunktet og Δ^+–propagatoren er som nedenfor

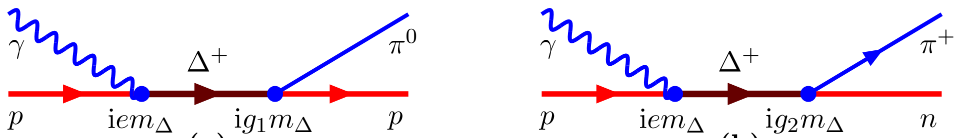




Her er e positronladningen, og m_Δ og Γ_Δ henholdsvis massen og vidden til Δ, som oppgitt i punkt **1g)**.

Tegn Feynmandiagrammene for prosessene (7).

Vi bruker overstående Feynmanreglene, og de fra oppgave **1f)**.



(a) **(b)**

d) Anta at protonet har en firervektor $p = E\,(1, 0, 0, 1)$ (energien er så stor at vi kan neglisjere protonets masse) og fotonet en firervektor $k = \omega\,(1, -\sin\vartheta, 0, -\cos\vartheta)$.

Skriv ned amplitudene $\mathcal{M}_{fi}$ for prosessene (7).

Vi får etter kansellering av i'er (og når vi tar i betraktning at Feynmanreglene gir oss det algebraiske uttrykket for $-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}$).

$$\mathcal{M}_{fi}^{(a)} = \frac{e g_1 m_\Delta^2}{q^2 - (m_\Delta + \mathrm{i}\Gamma_\Delta)^2}, \qquad \mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{e g_2 m_\Delta^2}{q^2 - (m_\Delta + \mathrm{i}\Gamma_\Delta)^2}, \tag{10}$$

der

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_p + p_\gamma)^2 = p_p^2 + p_\gamma^2 + 2p_p p_\gamma = m_p^2 + 2p_p p_\gamma = m_p^2 + 2\omega E_p + 2\omega E_p \cos\vartheta \\ &= m_p^2 + 4\omega E_p \cos^2\vartheta/2. \end{aligned}$$

e) For å beregne tverrsnittene til disse prosessene er det best å gå til massesentersystemet. Skisser hvordan du vil gå fram for å finne energiene ω^c og E^c til henholdsvis foton og proton i massesentersystemet (når ω, E, og $\cos\vartheta$ er kjent).

I massesentersystemet må vi ha

$$p_\gamma^c = (\omega^c, 0, 0, -\omega^c), \quad p_p^c = (E^c, 0, 0, \omega^c), \quad \text{med } E^c = \sqrt{\omega^{c2} + m_p^2}.$$

Dette gir oss to uttrykk for den Lorentz invariante størrelsen q^2

$$q^2 = m_p^2 + 4\omega E_p \cos^2\vartheta/2 = \left(\omega^c + \sqrt{\omega^{c2} + m_p^2}\right)^2, \tag{11}$$

som kan løses med hensyn på ω^c.

Kommentar: Denne løsningen blir

$$\omega^{c2} = \frac{\left(q^2 - m_p^2\right)^2}{4q^2} = \frac{4\omega^2 E_p^2 \cos^4\vartheta/2}{m_p^2 + 4\omega E_p \cos^2\vartheta/2},$$

men husk at dette er utledet under forutsetning om at $E_p \gg m_p$.

Oppgave 3.

Den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^{++} med spinn $S_z = \frac{3}{2}$ er gitt som

$$|\Delta^{++}\ \tfrac{3}{2}\rangle = |u\uparrow\rangle|u\uparrow\rangle|u\uparrow\rangle. \tag{12}$$

a) Finn den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^{+} med spinn $S_z = \frac{3}{2}$.

Vi anvender isospinn stigeoperatoren $I^- = I_1^- + I_2^- + I_3^-$ på ligning (12), og normerer for hånd. Dette gir

$$|\Delta^{+}\ \tfrac{3}{2}\,\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(|d\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle + |u\uparrow\rangle\,|d\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle + |u\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle\,|d\uparrow\rangle\right). \tag{13}$$

b) Finn den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^{+} med spinn $S_z = \frac{1}{2}$.

Vi anvender spinn stigeoperatoren $S^- = S_1^- + S_2^- + S_3^-$ på ligning (13), og normerer for hånd. Dette gir

$$\begin{aligned}
|\Delta^{+}\ \tfrac{1}{2}\,\rangle \;=\;& \frac{1}{3}\left(|d\downarrow\rangle\,|u\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle + |d\uparrow\rangle\,|u\downarrow\rangle\,|u\uparrow\rangle + |d\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle\,|u\downarrow\rangle\right) \\
+\;& \frac{1}{3}\left(|u\downarrow\rangle\,|d\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle + |u\uparrow\rangle\,|d\downarrow\rangle\,|u\uparrow\rangle + |u\uparrow\rangle\,|d\uparrow\rangle\,|u\downarrow\rangle\right) \\
+\;& \frac{1}{3}\left(|u\downarrow\rangle\,|u\uparrow\rangle\,|d\uparrow\rangle + |u\uparrow\rangle\,|u\downarrow\rangle\,|d\uparrow\rangle + |u\uparrow\rangle\,|u\uparrow\rangle\,|d\downarrow\rangle\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

c) Det magnetiske momentet til et baryon med spinn-flavor bølgefunksjon $|\Psi\rangle$ er definert som

$$\mu_z = \langle\Psi\,|\sum_i \frac{e\,\boldsymbol{Q}_i}{2\boldsymbol{m}_i}\,\boldsymbol{S}_{iz}\,|\,\Psi\rangle, \tag{15}$$

der summen er over de tre posisjonene i bølgefunksjonen. (Merk at $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{m}_i$ og $\boldsymbol{S}_{iz}$ er *operatorer* som tar forskjellige verdier avhengig av hvilke tilstander de virker på.)
Finn det magnetiske momentet til Δ^{++} med spinn $S_z = \frac{3}{2}$. Angi svaret i enheter av kjernemagnetonen, $\mu_{\rm km} = \frac{e}{2m_p}$.

Oppgitt: Du kan anta at $m_u = m_d = 336$ MeV.

$$\mu_z = \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\left(\frac{e}{2m_u}\right) = \left(\frac{m_p}{m_u}\right)\left(\frac{e}{2m_p}\right) = 2.795\ \mu_{\rm km}. \tag{16}$$

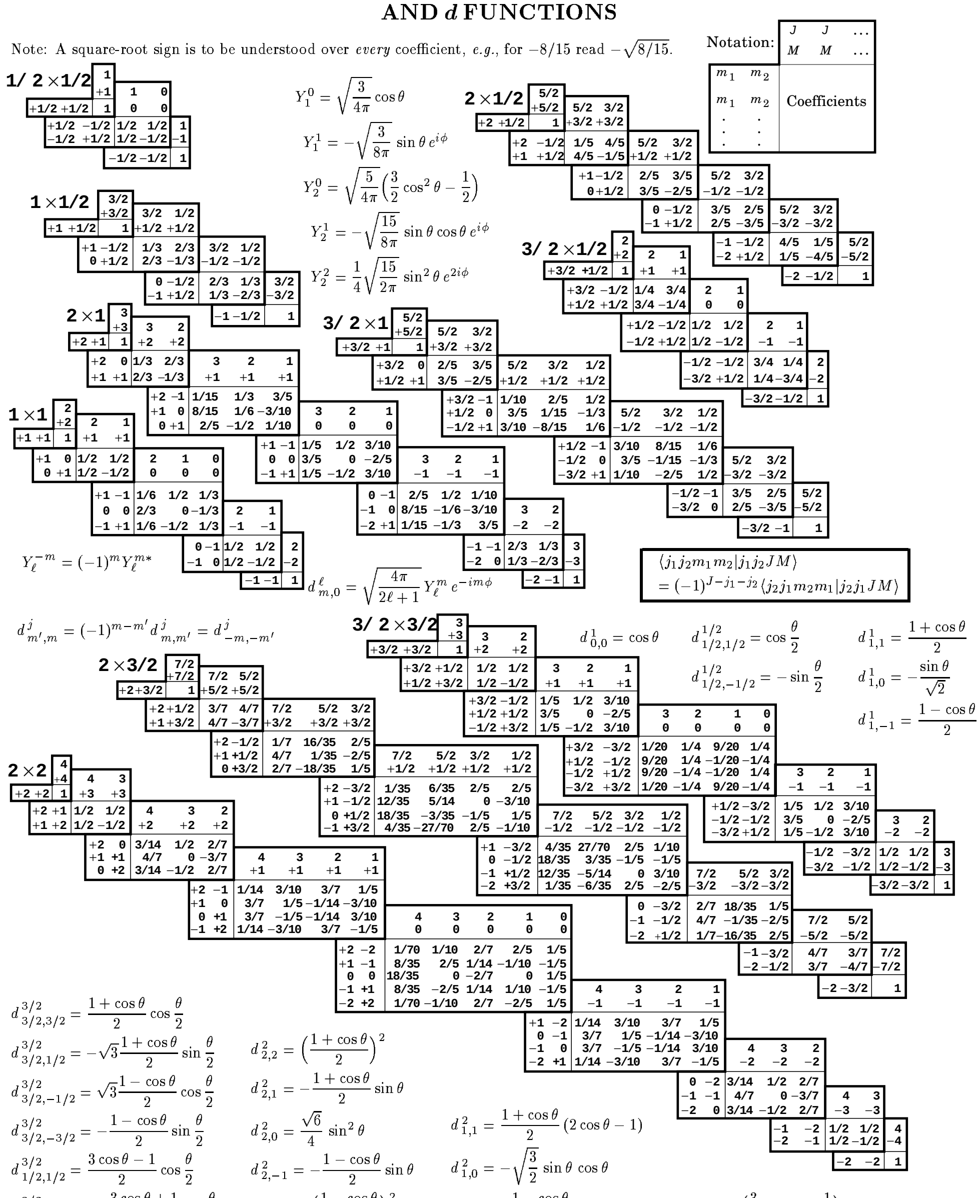
d) Finn det magnetiske momentet til Δ^{+} med spinn $S_z = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mu_z \;=\;& \tfrac{1}{9}\left[\left(-\tfrac{1}{3}\times -\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{3}\right)\times 3 + \left(-\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}\times -\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\right)\times 6\right]\left(\tfrac{e}{2m_u}\right) \\
=\;& \frac{1}{6}\left(\frac{m_p}{m_u}\right)\left(\frac{e}{2m_p}\right) = 0.466\ \mu_{\rm km}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Tips til punkt a–b): Bruk stigeoperatorene.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.



$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\,\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\,\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta - 1)$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta - 1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta + 1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta + 1) \qquad d^{\,2}_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.