NTNU
Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen i FY3452 Gravitasjon og Kosmologi

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Tlf: 73593131

Laurdag 19. mai 2007
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend lommekalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

I alle oppgavene bruker vi einheiter slik at $c = G = 1$. Metrikken er diag(-1,1,1,1). Oppgavesettet er på tre sider. Les oppgaveteksten nøye.

Oppgave 1

I denne oppgava skal vi studere ein partikkel som bevegar seg i ein romleg dimensjon. La $x(t)$ vere posisjonen til partikkelen i inertialsystemet S. Hastigheiten er $v(t) = dx(t)/dt$. La S' vere eit inertialsystem som bevegar seg med hastigheit V mot høgre i S.

a) Vis at hastigheiten v' til partikkelen i S' er gitt ved

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV} .$$

b) La a og a' vere akselerasjonen til partikkelen i S og S'. Finn samanhengen mellom a og a'.

c) Vi skal nå studere bevegelsen til ein partikkel som har konstant akselerasjon g i partikkelens instantane kvilesystem. Finn $v(t)$ i S når $v(0) = 0$.

Oppgave 2

Metrikken til eit homogent og isotropt univers er

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \left\{\begin{array}{l} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{array}\right\}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] , \quad \left\{\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 0 \\ k = -1 \end{array}\right\} ,$$

der $a(t)$ er skalafaktoren og k er den romlege krumninga. Friedmans likningar for eit homogent og isotropt univers er

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi\rho + \Lambda , \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi p - \Lambda . \end{aligned}$$

a) Definer ρ, p og Λ.

b) Kva er topologien til den romlege hyperflata definert ved $dt = 0$ i dei tre ulike tilfella?

Vi skal nå studere tilfellet der $k = 1$ og $p = 0$.

c) Det finst ei løysing av Friedmans likningar der $a(t)$ og ρ er konstante. Finn denne løysinga. Uttrykk a og ρ som funksjonar av Λ.

Oppgave 3

I denne oppgava skal vi studere eit svart hol. Metrikken er

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) .$$

a) Kva er tolkninga av m? $r = 0$ og $r = 2m$ er singulære punkt i denne metrikken. Kva slags singularitetar er dette?

b) To observatørar, Gro og Kåre, er i ro i $r = r_0 \gg 2m$. Dei blir samde om å undersøke det svarte holet. Gro skal vere i $r = r_0$ og Kåre skal falle fritt mot holet. For å oppretthalde kontakten, tar Kåre med seg ein radiosendar og ein liten rakettmotor. Radiosendaren sender ut elektromagnetiske bølger med frekvens ω^* når den ligg i ro. Forklar kva Gro observerer når Kåre fell fritt i radiell retning mot det svarte holet. Gjer spesielt greie for kva som skjer når han nærmar seg $r = 2m$.

c) Etter at Kåre har passert $r = 2m$ er det ikkje mogleg å snu. Han fell radielt inn mot $r = 0$. Dersom han startar rakettmotoren kan han utsette møtet med singulariteten. Rekn ut den lengste eigentida $\Delta\tau_{\text{maks}}$ det tar frå Kåre passerer $r = 2m$ til han er i $r = 0$.

Oppgave 4

Denne oppgava består av tre ulike spørsmål som ein kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) Lagrangetettheiten for ein ikkjerelativistisk feltteori der $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ er eit komplekst felt, er gitt ved

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2} i\hbar \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla \psi^*\right) \cdot \left(\nabla \psi\right) \; .$$

Finn bevegelseslikninga for ψ. Vis at $\mathcal{L}$ er invariant under globale fasetransformasjonar

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha} \; ,$$

der α er ein konstant. Finn kontinuitetslikninga for denne symmetrien. Generaliser Lagrangetettheiten slik at den blir invariant under lokale fasetransformasjonar, det vil seie transformasjonar der α er ein funksjon av $x = (\mathbf{x}, t)$.

b) Definer gruppa $SO(N)$. For kva verdiar av N er gruppa abelsk? Kor mange generatorar har gruppa? Grunngje svaret.

c) Gjer greie for ergosfæren til eit roterande svart hol.