NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Jens Oluf Andersen
Telefon: 9 31 31

Eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Fredag 3. juni 2011
09:00–13:00

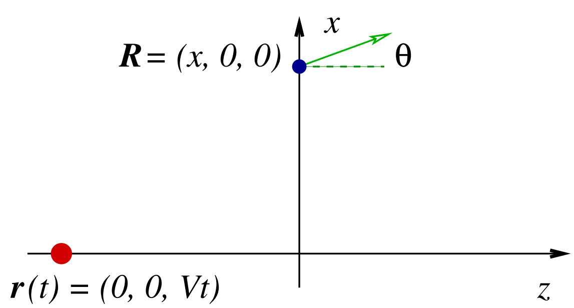
Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

There is also an english version of this exam set.

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1. Lorentz transformasjoner



Et objekt beveger seg med konstant hastighet V seg langs z-aksen, dvs. langs kurven

$$\boldsymbol{r}(t) = V t \, \hat{\boldsymbol{e}}_z. \tag{1}$$

Det blir observert av detektorer plassert i ro i posisjonen $\boldsymbol{R} = x \, \hat{\boldsymbol{e}}_x$. Du kan anta at x er ikke-negativ. Du kan også velge å bruke enheter der lyshastigheten $c = 1$.

Anta først at objektet sender ut lys (fotoner) i alle retninger. Sett fra et kooordinatsystem der objektet er i ro er dette lyset monokromatisk, dvs. at alle fotonene har samme energi $\hbar\omega_0$.

a) Et foton emittert fra objektet blir observert i posisjonen $\boldsymbol{R}$ ved tiden t. Ved hvilket tidspunkt t_0 ble det emittert?

Kontroller løsningen din ved å sjekke spesialtilfellene (i) $x = 0$ og (ii) $t_0 = 0$.

b) Fra hvilken posisjon på z-aksen ble fotonet emittert? I hvilken retning $\hat{\boldsymbol{n}} = \cos\theta \, \hat{\boldsymbol{e}}_z + \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{e}}_x$ observeres fotonet å bevege seg? Uttrykk dette ved å finne størrelsen $\cot\theta$, med θ som angitt på figuren over.

c) Hva er egenhastighet u'^{μ} til objektet i et koordinatsystem der det er i ro? Hva er egenhastigheten u^{μ} til objektet i vårt koordinatsystem (der detektorene er i ro)?

d) Hvilken energi $\hbar\omega$ observeres dette fotonet å ha? Uttrykk svaret ved $\hbar\omega_0$, vinkelen θ, og V.

Anta nå i0stedet at objektet er en punktladning Q, slik at det i sitt eget hvilesystem er omgitt av et rotasjonssymmetrisk elektromagnetisk felt,

$$\boldsymbol{E}'(t', \boldsymbol{x}') = \frac{Q\,\boldsymbol{x}'}{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{x}'|^3}, \quad \boldsymbol{B}'(t', \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

som også kan uttrykkes ved firer-potensialet

$$A'^{\mu}(t', \boldsymbol{x}') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}'|}\;(1, \boldsymbol{0})\,. \tag{3}$$

e) Uttrykk størrelsen $|\boldsymbol{x}'|$ ved koordinatene $(t, \boldsymbol{x})$ i hvilesystemet til detektorene.

Tips: Noen generelle transformasjonsformler er vedlagt sist i oppgavesettet.

f) Beregn feltet $\boldsymbol{E}(t, x, 0, 0)$ observert av detektorene i posisjonen $\boldsymbol{R}$.

Du kan velge å bruke transformasjonsformlene for den elektromagnetiske felttensoren, eller anta at firer-potensialet transformerer som en vektor og beregne $\boldsymbol{E}$-feltet fra det transformerte potensialet $A^{\nu}(t, \boldsymbol{x})$.

g) Sammenlign den observerte retningen på feltet, $\cot\vartheta \equiv E^z/E^x$, med retningen $\cot\theta$ til fotonene i punkt **b)**.

Oppgave 2. Et Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker univers

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metrikken er definert ved linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right), \tag{4}$$

når vi bruker enheter der lyshastigheten $c = 1$. I ligningen over er $k \in \{-1, 0, 1\}$.

a) Skriv ned (i) den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$, og (ii) den inverse metriske tensoren $g^{\mu\nu}$ for et univers beskrevet ved linje-elementet (4). Anta at den metriske tensoren har signatur $(-, +, +, +)$.

b) Beregn integrasjonsmålet $\sqrt{-g}$ for et univers beskrevet ved linje-elementet (4).

c) Forklar kvalitativt hva som menes med (i) kovariant derivert, (ii) konneksjons-koeffisienter, (iii) Riemann tensor, (iv) Ricci tensor, (v) Einstein tensor, og (vi) skalar krumning. Forklar kort hvordan du ville beregne disse størrelsene fra lineelementet (4). Du trenger ikke utføre noen eksplistte beregninger her, men du bør indikere indeks-strukturen til størrelser og relasjoner som inngår.

d) Anta at materieinnholdet i dette universet kan modelleres ved et skalarfelt φ og tilhørende virkning

$$S_{\text{matter}} = -\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + V(\varphi)\right), \tag{5}$$

hvor V er en differensierbar funksjon av sitt argument. Anta at feltet φ bare avhenger av tiden, $\varphi = \varphi(t)$.

Skriv virkningen S_{matter} på enklere og mer eksplisitt form for dette tilfellet, og finn Euler-Lagrange ligningen for feltet φ.

e) Hilbert-Einstein virkningen for gravitasjonsbidraget til virkningen er

$$S_{\text{HE}} = \frac{1}{16\pi G_N}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,R, \tag{6}$$

der G_N er Newtons gravitasjonskonstant, og R er skalar krumning. Skalar krumning tilhørende linjeelementet (4) er

$$R = \frac{6}{a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right). \tag{7}$$

Skriv virkningen $S_{\mathrm{HE}}0$ på enklere og mer eksplisitt form for dette tilfellet, på samme måte som for S_{matter} i forrige punkt, og bruk Hamiltons prinsipp for den totale virkningen $S_{\mathrm{total}} = S_{\mathrm{HE}} + S_{\mathrm{matter}}$ til å finne bevegelsesligningen for a.

Tips: Det er gunstig å først omskrive leddet med $\ddot{a}$ ved en delvis integrasjon, slik at du får en ekvivalent virkning som bare inneholder første ordens deriverte.

f) Virkningen S_{total} er invariant under tidstranslasjon, $\varphi(t) \to \varphi(t+\varepsilon)$ og $a(t) \to a(t+\varepsilon)$.

Bruk Nöthers teorem til å finne den tilhørende konserverte størrelsen.

Some expressions which *may* be of use

Covariant and contravariant transformation laws

Under a coordinate transformation, $x^\mu = x^\mu(x')$, the covariant (lower) indices of a tensor transform like the partial derivative, while the contravariant (upper) indices transforms like the line element,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}, \qquad \mathrm{d}x^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right) \mathrm{d}x'^\alpha. \tag{8}$$

Examples:

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\right) g'_{\alpha\beta}(x'), \qquad T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\right) T'^{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Lorentz transformations

Lorentz transformations can be viewed as a special class of coordinate transformation, linear and homogeneous, $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \, x'^\alpha$, preserving the Minkowski metric: $\Lambda^\mu{}_\alpha \, \Lambda^\nu{}_\beta \, \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. For a boost in the z-direction the matrix Λ is explicitly

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

This transformation is such that the origin of the old (primed) coordinate system is moving with a velocity $V = c \tanh\eta$ in the z-direction, when viewed from the new coordinate system.

Electromagnetic relations

The electromagnetic field tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ is related to the electric field $\boldsymbol{E}$ and magnetic field $\boldsymbol{B}$ by

$$\begin{aligned} &F^{0i} = -F^{i0} = E^i \quad \text{for } i = x, y, z, \\ &F^{12} = -F^{21} = B^z, \qquad F^{23} = -F^{32} = B^x, \qquad F^{31} = -F^{13} = B^y. \end{aligned} \tag{11}$$

In terms of a four-potential $A^\mu = \left(A^0, \boldsymbol{A}\right)$ we have $\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{\nabla} A^0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$ and $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$.

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \tag{12}$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \to \varphi_a + \varepsilon\, \delta\varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \varepsilon\, \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta\varphi_a - \Lambda^\mu. \tag{13}$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.