



Faglig kontakt under eksamen:  
Professor Kåre Olaussen  
Telefon: 45 43 71 70

## Eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Onsdag 17. august 2011

09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

Dette oppgavesettet er på 2 sider.

### Oppgave 1. Bevegelse av en punktpartikkel i Schwarzschild-geometrien

I generell relativitetsteori er geometrien rundt en punktmasse  $M$  beskrevet av Schwarzschild metrikken, i kulekoordinater definert ved linje-elementet

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_M}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1)$$

- Skriv ned Lagrangefunksjonen for en punktpartikkel som beveger seg i denne geometrien. Du kan parametrisere partikkelens bane i tidrommet ved dens egentid  $\tau$ , dvs. ved kurven  $x^\mu(\tau)$ .
- Utled Euler-Lagrange ligningene for  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$ . Du trenger foreløpig ikke løse disse ligningene.
- Vis at  $\theta = \frac{\pi}{2}$  er en konsistent løsning av Euler-Lagrange ligningen for  $\theta$ . (Du må vise at antagelsene  $\theta = \frac{\pi}{2}$  og  $\dot{\theta} \equiv \frac{d}{d\tau}\theta = 0$  impliserer at  $\ddot{\theta} = 0$ ).  
Anta at  $\theta = \frac{\pi}{2}$  i de neste punktene.
- Vis at  $\dot{t}$  kan elimineres fra Euler-Lagrange ligningene dine, dvs. uttrykkes som en funksjon av  $r(\tau)$ .
- Vis at  $\dot{\phi}$  kan elimineres fra Euler-Lagrange ligningene dine, dvs. uttrykkes som en funksjon av  $r(\tau)$ .
- Metrikken definert av ligning (1) avhenger ikke eksplisitt av tiden  $t$ , dvs. at virkningen utledet fra den er invariant under tids-translasjoner,  $t \rightarrow t + t_0$ . Bruk Nöther's teorem til å utlede en konserveringslov fra denne invariansen.
- Metrikken definert av ligning (1) avhenger ikke eksplisitt av vinkelen  $\phi$ , dvs. at virkningen utledet fra den er invariant under rotasjoner om  $z$ -aksen,  $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$ . Bruk Nöther's teorem til å utlede en konserveringslov fra denne invariansen.
- Metrikken definert av ligning (1) avhenger ikke eksplisitt av egentiden  $\tau$ , dvs. at virkningen utledet fra den er invariant under egentids-translasjoner,  $\tau \rightarrow \tau + \tau_0$ . Bruk Nöther's teorem til å utlede en konserveringslov fra denne invariansen.

- i) Vis, ved bruk av overstående resultater (eller på annet vis), at bevegelsen i Schwarzschild-geometrien kan reduseres til en første ordens differensialligning for  $r(\tau)$ , på formen

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = E, \quad (2)$$

der  $E$  er en konstant, finn det eksplisitte uttrykket for  $V(r)$  (som kan avhenge av de konserverte størrelsene du har funnet over).

### Oppgave 2. Schwarzschild-geometrien i kartesiske koordinater

I enkelte sammenhenger kan det være ønskelig å beskrive geometrien rundt en punktmasse  $M$  i bevegelse. For dette kan det være gunstig å bruke kartesiske koordinater,  $(x, y, z)$ .

- Finn elementet  $dr^2$  uttrykt ved  $dx$ ,  $dy$  og  $dz$ , og eventuelt funksjoner av  $x$ ,  $y$  og  $z$ .
- Finn elementet  $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$  uttrykt ved  $dx$ ,  $dy$  og  $dz$ , og eventuelt funksjoner av  $x$ ,  $y$  og  $z$ .
- Skriv ned linje-elementet (1) uttrykt ved  $dx$ ,  $dy$  og  $dz$ , og eventuelt funksjoner av  $x$ ,  $y$  og  $z$ .

### Oppgave 3. Lorentz transformasjon av firer-skalar og firer-vektor

En Lorentz-transformasjon langs  $z$ -aksen har formen

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

- a) I hvilken retning og med hvilken fart  $v$  beveges origo i det gamle koordinatsystemet,

$$\mathbf{r} \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

sett fra det nye?

- b) En (firer-)skalar størrelse  $\varphi(x)$  har formen

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4)$$

i det gamle koordinatsystemet.

Hvordan beskrives denne størrelsen i det nye koordinatsystemet?

- c) En (firer-)vektor størrelse  $J^\mu(x)$  har formen

$$J^\mu(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{1}{r}, 0, 0, 0 \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, 0, 0, 0 \right) \quad (5)$$

i det gamle koordinatsystemet.

Hvordan beskrives denne størrelsen i det nye koordinatsystemet?

# Some expressions which *may* be of use

## Covariant and contravariant transformation laws

Under a coordinate transformation,  $x^\mu = x^\mu(x')$ , the covariant (lower) indices of a tensor transform like the partial derivative, while the contravariant (upper) indices transform like the line element,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}, \quad dx^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) dx'^\alpha. \quad (6)$$

Examples:

$$g_{\mu\nu}(x) = \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left( \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \right) g'_{\alpha\beta}(x'), \quad T^{\mu\nu} = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \right) T'^{\alpha\beta}. \quad (7)$$

## Lorentz transformations

Lorentz transformations can be viewed as a special class of coordinate transformation, linear and homogeneous,  $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x'^\alpha$ , preserving the Minkowski metric:  $\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . For a boost in the  $z$ -direction the matrix  $\Lambda$  is explicitly

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix}. \quad (8)$$

This transformation is such that the origin of the old (primed) coordinate system is moving with a velocity  $V = c \tanh \eta$  in the  $z$ -direction, when viewed from the new coordinate system.

## Electromagnetic relations

The electromagnetic field tensor  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  is related to the electric field  $\mathbf{E}$  and magnetic field  $\mathbf{B}$  by

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -F^{i0} = E^i \quad \text{for } i = x, y, z, \\ F^{12} &= -F^{21} = B^z, \quad F^{23} = -F^{32} = B^x, \quad F^{31} = -F^{13} = B^y. \end{aligned} \quad (9)$$

In terms of a four-potential  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$  we have  $\mathbf{E} = -\left(\nabla A^0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$  and  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

## Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$  are

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \quad (10)$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting  $\partial_\mu$  to only a time derivative  $d/dt$ .

## Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations  $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \varepsilon \delta \varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , more precisely that  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a - \Lambda^\mu. \quad (11)$$

I.e.,  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting  $\partial_\mu$  to only a time derivative  $d/dt$ .