



Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 45 43 71 70

Eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Torsdag 8. august 2013
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

Dette oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1. Aspekter ved standardmodellen for kosmologi

I standardmodellen for kosmologi (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen) innfører man forskjellige former for materie eller energi. Forklar hva man i denne forbindelsen mener med

- Mørk energi eller kvintessens (dark energy or quintessence).
- Mørk materie (dark matter).
- Kald materie (cold matter).
- Varm materie (hot matter)
- Omtrent hvor stor andel (i prosent) av den total energitettheten utgjør hver av disse energiformene i dag (ifølge beste tilpasning til kosmologiske data)?
- Hvordan skalerer tettheten av disse energiformene med universet ekspansjon, dvs. med skalafaktoren $a(t)$?

Matematisk kan Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen, med kun én form for energi eller materie (når man også betrakter kosmologisk konstant og krumningseffekter som energiformer), oppsummeres ved Friedmanns første ligning,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{G_N}{c^2} \varepsilon, \quad (1)$$

konserveringsloven

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0 \quad (2)$$

(der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på tiden t), og tilstandsligningen

$$P = w\varepsilon. \quad (3)$$

Her er $H \equiv H(t) = a(t)^{-1} \frac{d}{dt} a(t)$ Hubble-parameteren, der $a(t)$ skalafaktorer i modellen.

- Anta at w er en konstant, og bruk ligningene (2-3) til å finne hvordan ε varierer med skalafaktoren a . Dvs. vis at $\varepsilon(t) \sim a(t)^\mu$, og bestem konstanten μ .
- Bruk resultatet fra forrige punkt sammen med ligning (1) til å finne hvordan $a(t)$ varierer med tiden t . Dvs. vis at $a(t) \sim t^\nu$ (unntatt en spesiell verdi av w), og bestem konstanten ν .

Oppgave 2. Forenklet Randall-Sundrum modell

Se på geometrien definert av linje-elementet

$$d\tau^2 = e^{k|u|} (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) - du^2, \quad (4)$$

dvs. et univers med en ekstra romdimensjon (u -retningen). Bevegelsen til en punktpartikkel (med masse $m = \frac{1}{2}$ i passende enheter) i denne geometrien er bestemt av Lagrangefunksjonen,

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (5)$$

via Hamiltons prinsipp. Her løper μ, ν over fem tidrom indekser,

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = (t, x, y, z, u), \quad (6)$$

og $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn til egentid τ .

- Finn Euler-Lagrange ligningene for bevegelse i denne geometrien.
- Sammenlign resultatene fra forrige punkt med de geodesiske ligningene på generell form, og bruk dette til å finne alle ikke-forsvinnende Christoffel-symboler $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ for denne geometrien.
- Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av t . Hvilken konserverte størrelse gir dette opphav til?
- Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Hvilke konserverte størrelser gir dette opphav til?
- Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av τ . Hvilken konserverte størrelse gir dette opphav til?

En massiv partikkel starter i punktet $\mathbf{r} = 0, u = 0$ ved tiden $t = 0$, med "hastighetene" $\dot{\mathbf{r}} = (v_0, 0, 0)$ og $\dot{u} = v_1 > 0$.

- Hva er tidens "hastighet", \dot{t} , ved starttidspunktet?
- Finn $\dot{t}, \dot{x}, \dot{y}$ og \dot{z} uttrykt ved \dot{u}, u og startverdiene.
- Finn den største absoluttverdien som u kan anta.
- Beregn så langt du kan banen $x^\mu(\tau)$ til denne partikkelen.

Some expressions which *may* be of use

Geodesic equations

The geodesic equations in a geometry with connection coefficients $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ are

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \quad (7)$$

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \quad (8)$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \varepsilon \delta \varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a - \Lambda^\mu. \quad (9)$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .

