**NTNU**

**Institutt for fysikk**

**Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk**

# Løsningsforslag til eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Torsdag 8. august 2013

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

## Oppgave 1. Aspekter ved standardmodellen for kosmologi

I standardmodellen for kosmologi (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen) innfører man forskjellige former for materie eller energi. Forklar hva man i denne forbindelsen mener med

**a)** Mørk energi eller kvintessens (dark energy or quintessence).

Mørk energi er energiform der det assosierte trykket $P$ er relatert til energitettheten $\varepsilon$ ved formelen

$$P = -\varepsilon. \tag{1}$$

I standardmodellend for kosmologi er mørk energi nødvendig for å forklare universets akselererende ekspansjon de siste (ca. fem) milliarder år.

**Kommentar:** *Mørk* henspiller i denne forbindelse på at man er litt i mørke når det gjelder kunnskap om denne energiformen, spesielt når det gjelder uavhengige observasjoner av denne, men noen alternativer er *vakuumenergi* og *kosmologisk konstant*.

**b)** Mørk materie (dark matter).

Mørk materie er ikke-relativistisk materie som ikke er direkte synlig som lysgivende objekter, dvs. stjerner og galakser. Den er nødvendig i standardmodellen for å forklare galaksedynamikk og universets struktur på stor skala, og observerte gravitasjonlinse-effekter.

**Kommentar:** *Mørk* henspiller her først og fremst på at denne materien ikke er synlig i teleskoper, og ikke ser ut til å påvirke lysende materie på annen måte enn gjennom gravitasjonspåvirkning. Men man er også noe i mørke med hensyn til hva denne materien består av.

**c)** Kald materie (cold matter).

Kald materie kan er materie som beveger seg ikke-relativistisk, slik at det kinetiske energibidraget er mye mindre enn bidraget fra hvilemassen. Dette betyr at vi kan neglisjere effekter av trykket $P$ i standardmodellen,

$$P \approx 0. \tag{2}$$

Kald materie består av både mørk og normal lysende (av kjent form) materie.

**Kommentar:** Stjerner, med temperatur på noen tusen grader, regnes altså som kald materie i denne sammenhengen.

**d)** Varm materie (hot matter)

Varm materie er relativistisk materie, der det kinetiske energibidraget er mye større enn bidraget fra en eventuell hvilemasse. I standardmodellen betyr dette at vi har sammenhengen

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{3}$$

**e)** Omtrent hvor stor andel (i prosent) av den total energitettheten utgjør hver av disse energiformene i dag (ifølge beste tilpasning til kosmologiske data)?

Ifølge siste tilpassning utgjør mørk energi ca. 68% og kald materie ca. 32% (ca. 27% mørk pluss ca. 5% normal materie) av energitettheten i universet. Bidraget fra den varme materien er altså neglisjerbar idag.

**f)** Hvordan skalerer tettheten av disse energiformene med universet ekspansjon, dvs. med skalafaktoren $a(t)$?

- Energitettheten til mørk energi er uavhengig av ekspansjonen, $\varepsilon \sim a^0$.
- Energitettheten til kald materie er omvendt proporsjonal med universets volum, $\varepsilon \sim a^{-3}$. Dette kan tolkes som at antallet massive partikler, og deres masse, er konstant.
- Energitettheten til varm materie skalerer som $\varepsilon \sim a^{-4}$. Dette kan tolkes som at antallet masseløse partikler er konstant, men at deres energi avtar som $a^{-1}$ pga. rødforskyvning.

Matematisk kan Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen, med kun én form for energi eller materie (når man også betrakter kosmologisk konstant og krumningseffekter som energiformer), oppsummeres ved Friedmanns første ligning,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{G_N}{c^2}\,\varepsilon, \tag{4}$$

konserveringsloven

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0 \tag{5}$$

(der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på tiden $t$), og tilstandsligningen

$$P = w\varepsilon. \tag{6}$$

Her er $H \equiv H(t) = a(t)^{-1}\frac{d}{dt}a(t)$ Hubble-parameteren, der $a(t)$ skalafaktorer i modellen.

**g)** Anta at $w$ er en konstant, og bruk ligningene (5-6) til å finne hvordan $\varepsilon$ varier med skalafaktoren $a$. Dvs. vis at $\varepsilon(t) \sim a(t)^{\mu}$, og bestem konstanten $\mu$.

Vi setter (6) inn i (5) og deler på $\varepsilon$,

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Dette kan omskrives som

$$\frac{d}{dt}\left[\log\varepsilon(t) + 3(1+w)\log a(t)\right] = \frac{d}{dt}\log\left[\varepsilon(t)a(t)^{3(1+w}\right] = 0.$$

Dvs. at $\varepsilon(t)\,a(t)^{3(1+w)}$ er tidsuavhengig,

$$\varepsilon(t) \sim a(t)^{-3(1+w)}. \tag{7}$$

**h)** Bruk resultatet fra forrige punkt sammen med ligning (4) til å finne hvordan $a(t)$ varierer med tiden $t$. Dvs. vis at $a(t) \sim t^{\nu}$ (unntatt en spesiell verdi av $w$), og bestem konstanten $\nu$.

Ligning (7) innsatt i (4) impliserer at

$$\frac{\dot{a}}{a} = K\,a^{-\frac{3}{2}(1+w)}, \tag{8}$$

der $K$ er en ukjent konstant. I spesialtifellet $w = -1$ gir dette

$$\dot{a}(t) = K\,a(t),$$

med løsning

$$a(t) = \mathrm{e}^{Kt}\, a(0). \tag{9}$$

For $w \neq -1$ omskriver vi ligningen til

$$a^{\frac{1}{2}(1+3w)} da = \frac{2}{3(1+w)}\, da^{\frac{3}{2}(1+w)} = K dt$$

Dvs. at

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \tag{10}$$

Vi har valgt et passende nullpunkt for tiden $t$.

## Oppgave 2. Forenklet Randall-Sundrum modell

Se på geometrien definert av linje-elementet

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{e}^{k|u|}\left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\right) - \mathrm{d}u^2, \tag{11}$$

dvs. et univers med en ekstra romdimensjon ($u$-retningen). Bevegelsen til en punktpartikkel (med masse $m = \frac{1}{2}$ i passende enheter) i denne geometrien er bestemt av Lagrangefunksjonen,

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \tag{12}$$

via Hamiltons prinsipp. Her løper $\mu$, $\nu$ over *fem* tidrom indekser,

$$x^\mu \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4\right) = (t, x, y, z, u)\,, \tag{13}$$

og $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn til egentid $\tau$.

**a)** Finn Euler-Lagrange ligningene for bevegelse i denne geometrien.

Fra de generelle Euler-Lagrange ligningene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\sigma}$$

finner vi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{k|u|}\,\dot{t} = 0, \tag{14a}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{k|u|}\,\dot{x} = 0, \tag{14b}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{k|u|}\,\dot{y} = 0, \tag{14c}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{k|u|}\,\dot{z} = 0, \tag{14d}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{k|u|}\,\dot{u} = \frac{1}{2}\theta(u)\, k\, \mathrm{e}^{k|u|}\left(\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2\right). \tag{14e}$$

Her er $\theta(u)$ stepfunksjonen,

$$\theta(u) = \begin{cases} 1 & \text{for } u > 0, \\ -1 & \text{for } u < 0. \end{cases}$$

**b)** Sammenlign resultatene fra forrige punkt med de geodesiske ligningene på generell form, og bruk dette til å finne alle ikke-forsvinnende Christoffel-symboler $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ for denne geometrien.

For å sammenligne med de generelle geodesiske ligningene,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\,\dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0,$$

utfører vi derivasjonen på venstresidene av (14), og multipliserer med $\mathrm{e}^{-k|u|}$. Vi har at

$$\mathrm{e}^{-k|u|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{k|u|} = \theta(u)\,k\,\dot{u},$$

slik at (14) blir

$$\ddot{t} + 2g(u)\,\dot{u}\,\dot{t} = 0, \tag{15a}$$
$$\ddot{x} + 2g(u)\,\dot{u}\,\dot{x} = 0, \tag{15b}$$
$$\ddot{y} + 2g(u)\,\dot{u}\,\dot{y} = 0, \tag{15c}$$
$$\ddot{z} + 2g(u)\,\dot{u}\,\dot{z} = 0, \tag{15d}$$
$$\ddot{u} + g(u)\,\left(-\dot{t}\dot{t} + \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} + 2\,\dot{u}\,\dot{u}\right) = 0, \tag{15e}$$

der $g(u) = \frac{1}{2}\theta(u)\,k$. Fra dette leser vi ut alle Christoffel-symboler som ikke er null:

$$\Gamma^{t}{}_{ut} = \Gamma^{t}{}_{tu} = \Gamma^{x}{}_{ux} = \Gamma^{x}{}_{xu} = \Gamma^{y}{}_{uy} = \Gamma^{y}{}_{yu} = \Gamma^{z}{}_{uz} = \Gamma^{z}{}_{zu} = g(u), \tag{16a}$$
$$\Gamma^{u}{}_{tt} = -\Gamma^{u}{}_{xx} = -\Gamma^{u}{}_{yy} = -\Gamma^{u}{}_{zz} = -g(u), \tag{16b}$$
$$\Gamma^{u}{}_{uu} = 2g(u). \tag{16c}$$

**c)** Lagrangefunksjonen $L$ avhenger ikke eksplisitt av $t$. Hvilken konservert størrelse gir dette opphav til?

Ifølge Nöthers teorem blir den konserverte størrelsen,

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \mathrm{e}^{k|u|}\,\dot{t}, \tag{17}$$

som vi normalt vil indentifisere med systemets energi (eller noe proporsjonalt med denne). Vi kan også lese ut denne konserveringsloven direkte fra ligning (14a).

**d)** Lagrangefunksjonen $L$ avhenger ikke eksplisitt av $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Hvilke konserverte størrelser gir dette opphav til?

Ifølge Nöthers teorem blir de konserverte størrelsene,

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \mathrm{e}^{k|u|}\,\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{18}$$

som vi normalt vil indentifisere med systemets bevegelsesmengde (eller noe proporsjonalt med denne). Vi kan også lese ut disse konserveringslovene direkte fra ligningene (14b-14d).

**e)** Lagrangefunksjonen $L$ avhenger ikke eksplisitt av $\tau$. Hvilken konservert størrelse gir dette opphav til?

Ifølge Nöthers teorem blir konserveringsloven

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\,\dot{x}^{\mu} - L = L. \tag{19}$$

Dette sier bare at partikkelens *femmer-hastighet*[1] har konstant lengde; egentiden $\tau$ er valgt slik at

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 1, \tag{20}$$

slik man kan lese ut av ligning (11) etter divisjon med $\mathrm{d}\tau^2$. De dynamiske ligningene er konsistent med denne normaliseringsbetingelsen. Her finner vi altså konserveringsloven (eller normaliseringsbetingelsen)

$$\mathrm{e}^{k|u|}\left(\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2\right) - \dot{u}^2 = 1. \tag{21}$$

[1] Normalt (i et firedimensjonalt tidrom) kalt *firer-hastighet*.

En massiv partikkel starter i punktet $\boldsymbol{r} = 0$, $u = 0$ ved tiden $t = 0$, med "hastighetene" $\dot{\boldsymbol{r}} = (v_0, 0, 0)$ og $\dot{u} = v_1 > 0$.

**f)** Hva er tidens "hastighet", $\dot{t}$, ved starttidspunktet?

Ifølge ligning (21) må vi ha

$$\dot{t}^2 = \mathrm{e}^{-k|u|} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1 + v_0^2 + v_1^2,$$

dvs. for $\dot{t}(0) \equiv \dot{t}_0$,

$$\dot{t}_0 = \sqrt{1 + v_0^2 + v_1^2}. \tag{22}$$

**g)** Finn $\dot{t}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ og $\dot{z}$ uttrykt ved $\dot{u}$, $u$ og startverdiene.

Fra konserveringslovene for energi og bevegelsesmengde finner vi at

$$\dot{t} = \mathrm{e}^{-k|u|}\, \dot{t}_0, \tag{23a}$$
$$\dot{x} = \mathrm{e}^{-k|u|}\, v_0, \tag{23b}$$
$$\dot{y} = 0, \tag{23c}$$
$$\dot{z} = 0. \tag{23d}$$

**h)** Finn den største absoluttverdien som $u$ kan anta.

Ligning (23) innsatt i ligning (21) gir

$$\dot{u}^2 = (1 + v_1^2)\mathrm{e}^{-k|u|} - 1. \tag{24}$$

Siden venstresiden må være ikke-negativ har vi at

$$(1 + v_1^2)\, \mathrm{e}^{-k|u|} \geq 1,$$

eller

$$|u| \leq \frac{\log(1 + v_1^2)}{k} \equiv u_{\mathrm{max}}. \tag{25}$$

**i)** Beregn så langt du kan banen $x^\mu(\tau)$ til denne partikkelen.

Vi antar først at $u \geq 0$ og $\dot{u} \geq 0$. Ligning (24) kan da skrives på formen

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1 + v_1^2)\, \mathrm{e}^{-ku} - 1}} = \mathrm{d}\tau. \tag{26}$$

Ved å innføre $\rho = \sqrt{(1 + v_1^2)\, \mathrm{e}^{-ku} - 1}$ kan dette omskrives som

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{1 + \rho^2} = \mathrm{d} \arctan \rho = -\tfrac{1}{2} k\, \mathrm{d}\tau. \tag{27}$$

Dette kan integreres til

$$\arctan \rho = \phi_0 - \tfrac{1}{2} k\tau.$$

Ved inversjon finnes så at

$$\rho(\tau) = \tan\left(\phi_0 - \tfrac{1}{2} k\tau\right). \tag{28}$$

Her er $\phi_0$ en konstant bestemt slik at $\tan \phi_0 = \rho(0) = v_1$. Fra dette finner vi for $u > 0$,

$$\mathrm{e}^{-ku} = \frac{1 + \rho^2}{1 + v_1^2} = \frac{1}{(1 + v_1^2)\, \cos^2(\phi_0 - \frac{1}{2} k\tau)}. \tag{29}$$

Ved innsetting i ligningene (23) kan disse integreres til

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{\sqrt{1+v_0^2+v_1^2}}{1+v_1^2} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\cos^2(\phi_0 - \frac{1}{2}k\tau')} \\ &= \frac{2}{k} \frac{\sqrt{1+v_0^2+v_1^2}}{1+v_1^2} \left[\tan(\phi_0) - \tan(\phi_0 - \tfrac{1}{2}k\tau)\right], && (30a) \\ x(\tau) &= \frac{v_0}{1+v_1^2} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\cos^2(\phi_0 - \frac{1}{2}k\tau')} \\ &= \frac{2}{k} \frac{v_0}{1+v_1^2} \left[\tan(\phi_0) - \tan(\phi_0 - \tfrac{1}{2}k\tau)\right], && (30b) \\ y(\tau) &= 0, && (30c) \\ z(\tau) &= 0. && (30d) \end{aligned}$$

Den siste koordinaten er allerede gitt av ligning (29),

$$u(\tau) = \frac{1}{k} \log\left[(1+v_1^2)\cos^2(\phi_0 - \tfrac{1}{2}k\tau)\right]. \tag{31}$$

# Some expressions which *may* be of use

## Geodesic equations

The geodesic equations in a geometry with connection coefficients ${\Gamma^{\mu}}_{\nu\lambda}$ are

$$\ddot{x}^{\mu} + {\Gamma^{\mu}}_{\nu\lambda}\,\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\lambda} = 0. \tag{32}$$

## Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} \right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}. \tag{33}$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting $\partial_\mu$ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

## Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \to \varphi_a + \varepsilon\,\delta\varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \varepsilon\,\partial_\mu\Lambda^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a - \Lambda^\mu. \tag{34}$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting $\partial_\mu$ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.