NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52

Eksamen i fag 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Fredag 26. mai 2000
Tid: 09:00—14:00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling.*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae.*
Øgrim: *Størrelser og enheter i fysikken*

Dette eksamenssettet er på 3 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.
Sensuren legges ut på fagets webside,
`http://www.phys.ntnu.no/~kolausen/74327-2000/`
straks den er klar.
Note: There also exists an english version of this exam set.

Oppgave 1:

a) Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

1. $e^+\gamma \to e^+\gamma$
2. $e^+\gamma \to e^+\gamma\gamma$
3. $e^+\mu^- \to e^-\mu^+$
4. $e^+\mu^- \to e^+\mu^-$
5. $e^+e^- \to \mu^+\mu-$
6. $e^- \to e^-\mu^+\mu-$
7. $\gamma\gamma \to \gamma$
8. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$
9. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma\gamma$

b) Se nå i litt mer detalj på Compton spredning, $e^-\gamma \to e^-\gamma$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser. Anta at det innkommende (resp. utgående) elektronet har kvantetall p, s (resp. p', s'), og at det innkommende (resp. utgående) fotonet har kvantetall k, r (resp. k', r'). Innfør videre $q = p + k$ og $q' = p - k'$.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.
3. Benytt "naturlige enheter" (der $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$) og anta at prosessen betraktes fra et koordinatsystem der det innkommende fotonet har frekvens ω, dvs. at $k = (\omega, 0, 0, \omega)$, og spres mot et elektron som opprinnelig er i ro, dvs. at $p = (m, 0, 0, 0)$. Bruk konservering av energi og bevegelsesmengde til å bestemme frekvensen ω' til det utgående fotonet som funksjon av fotonets spredningsvinkel ϑ.
4. Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at det innkommende fotonet har svært lav frekvens, $\omega \ll m$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet da må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.
5. Det differensielle spredningstverrsnittet for Compton spredning kan skrives på formen,
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = K|\mathcal{M}_{fi}|^2, \tag{1}$$
der $\mathcal{M}_{fi}$ er spredningsamplituden fra underpunkt 2 og $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$. Bruk informasjon i vedlegget til å finne et eksplisitt uttrykk for faktoren K.
6. Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene (r, s) til de innkommende partiklene, og summerer over spinntilstandene (r', s') til de utgående partiklene. Amplitudekvadratet $\sum_{rsr's'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ-matriser (med prefaktorer). Finn denne summen. Du trenger ikke å regne ut sporene.

Oppgitt:

Planck's konstant	$\hbar = 1.054\ 572\ 66(63) \times 10^{-34}$ J s
Lyshastigheten	$c = 299\ 792\ 458$ m s^{-1}
Elektronets masse	$m = 9.1096 \times 10^{-31}$ kg
Finstrukturkonstanten	$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/1/137.035\ 989\ 5(61)$

Oppgave 2:

Anta at $p^2 = p'^2 = m^2$, og $k^2 = k'^2 = 0$. Beregn følgende spor av γ-matriser:

$$T_1 = \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\, \not{k}\, \gamma^\nu\, \gamma_\nu\, \not{k}\, \gamma_\mu\} \tag{2}$$
$$T_2 = \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\, \not{k}\, \gamma^\nu\, \gamma_\mu\, \not{k}'\, \gamma_\nu\} \tag{3}$$
$$T_3 = \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\, \not{k}\, \gamma^\nu\, \not{p}\, \gamma_\nu\, \not{k}\, \gamma_\mu\, \not{p}'\} \tag{4}$$
$$T_4 = \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\, \not{k}\, \gamma^\nu\, \not{p}\, \gamma_\mu\, \not{k}'\, \gamma_\nu\, \not{p}'\} \tag{5}$$

Oppgave 3:

I denne oppgaven skal du analysere en reell Klein-Gordon feltteori (i $3+1$ rom-tids dimensjoner), definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\,m^2\varphi^2 - \kappa\,\varphi, \tag{6}$$

der m^2 og κ er konstante parametre, og vi bruker naturlige enheter.

a) Hvilken lengde-dimensjon har parametrene m og κ?

b) Finn feltligningen som φ må oppfylle.

c) Finn feltet Π_φ som er kanonisk konjugert til feltet φ.

d) Finn den tilhørende Hamiltontettheten $\mathcal{H}$ for denne modellen.

e) Bestem hvordan energitettheten i vakuum,

$$T^{00}_{\text{vac}} = \langle\Omega|\mathcal{H}|\Omega\rangle = \frac{1}{V}\,E_{\text{vac}}, \tag{7}$$

avhenger av parameteren κ i denne modellen.

Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2\, m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p_i'\,)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3 p_i'}{(2\pi)^3\, 2E_i'} \qquad (8)$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	p, s	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	p, s	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	p, s	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	p, s	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	k, r	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	k, r	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	k	1	Uladet spinn–0	k	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	p	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	μ	$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	k μ ν	$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	k	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{9}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e_\nu^*(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{10}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{13}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{14}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{15}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{16}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{17}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{18}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{19}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{20}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{21}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{22}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$