

UNIVERSITETET I TRONDHEIM  
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:  
F.aman. F. Bakke  
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fredag 8. juni 1990

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung  
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

a) Skriv opp Diraclikningen for et elektron med ladning  $e$  i et elektromagnetisk felt med potensial  $A^\mu = (\frac{1}{c} \phi, \vec{A})$  og redegjør for de størrelsene som inngår.

b) Lorentz-transformasjonen  $x^{\mu'} = a^\mu_{\nu} x^\nu$  gir sammenhengen mellom koordinatene i et inertialsystem  $L$  som beveger seg med konstant hastighet  $\vec{v}$  i forhold til et annet inertialsystem  $L'$ .

Når bevegelsen foregår langs de parallelle  $x$ -aksene er

$$a^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \begin{aligned} \cosh \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \sinh \alpha &= \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}$$

Sammenhengen mellom Dirac-spinoren  $\psi$  i de to systemene er gitt ved en transformasjonsmatrise  $S$

$$\psi_\alpha = S_{\alpha\beta} \psi_\beta$$

mens Dirac-matrisene  $\gamma^\mu$  er de samme i begge systemene.

Vis at når matrisene  $a^\mu_{\nu}$  og  $S$  tilfredstiller betingelseslikningene

$$a^\lambda_{\mu} \gamma^\mu = S^{-1} \gamma^\lambda S$$

så er Dirac-likningen invariant med denne Lorentz-transformasjonen.

c) Vis at matrisen

$$S = 1 \cosh \frac{\alpha}{2} - \gamma^0 \gamma^1 \sinh \frac{\alpha}{2}$$

tilfredstiller denne betingelsen når bevegelsen foregår langs x-aksen.

d) Finn en løsning  $\psi_0$  av Dirac-likningen for et fritt elektron i ro med positiv energi ( $\vec{p} = 0, A^\mu = 0$ ) når en bruker standardrepresentasjonen for  $\gamma^\mu$ .

e) Benytt dette til å finne tilstandsfunksjonen for et fritt elektron i et vilkårlig inertialsystem.

### Oppgave 2

a) Tegn laveste ordens Feynman -diagrammer for prosessene

i)  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$

ii)  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$

b) Bruk Feynman -reglene til å skrive opp de algebraiske uttrykkene for de tilhørende bidragene til spredningsamplituden  $S_{fi}$ .

c) Gi en enkel definisjon av spredningsamplituden  $S_{fi}$  og vis at det differensielle reaksjonstverrsnitt for en reaksjon mellom to partikler som fører til også to partikler i slutt-tilstanden er

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{2\pi}{v_i} |V^2 K_{fi}|^2 \rho_f(E_f)$$

hvor  $K_{fi}$  er bestemt av

$$S_{fi} = \delta_{fi} + K_{fi} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$$

$P_f = (E_f, \vec{P}_f)$  og  $P_i$  er den totale 4-impuls i henholdsvis slutt- og begynnelses-tilstandene.  $v_i$  er de innkommende partiklenes relative hastighet.  $\rho_f(E_f)$  er tetthet av slutt-tilstander med energi  $E_f$  og en partikkel i retning  $\Omega_f$ .

$V$  er normeringsvolumet. Her benyttes  $V = (2\pi)^3$ . Det er brukt enheter med  $\hbar = c = 1$ .

d) Når en regner i laboratoriesystemet hvor elektronet i begynnelsestilstanden er i ro ( $\vec{p}_i = 0$ ) kan uttrykket for  $S_{fi}$  i b) forenkles betraktelig ved å bruke noen av formlene i vedlegget og dessuten huske på at lyset er transversalt polarisert.

Utfør forenklingen for Comptonspredningen  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ .

Regler for Feynman-diagram.

I impulsrommet

Ytre linjer:

Elektronlinjer:

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \\ p, s \end{array} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} u(p, s) & \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ p, s \end{array} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p, s)
 \end{array}$$

Positronlinjer:

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} p, s \\ \searrow \\ \bullet \end{array} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p, s) & \begin{array}{c} \searrow \\ \bullet \\ p, s \end{array} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} v(p, s)
 \end{array}$$

Fotonlinjer:

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda} & \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \bullet \\ k, \lambda \end{array} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}
 \end{array}$$

Ytre felt:

$$\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{X} \text{ ytre} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} \quad -ie\gamma^\mu A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) 2\pi\delta(E_1 - E_2)$$

med  $A_\mu^{\text{ytre}}(k) = \int A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow \\ p \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ p \end{array} \quad \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4p \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{array}{c} \nu \\ \text{wavy} \\ k \\ \mu \end{array} \quad \frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4k$$

Knuter:

$$\begin{array}{c} p_2, s \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ p_1, s \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \quad -ie\gamma^\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k)$$

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

med metrikken  $g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{når } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når } \mu \neq \nu \end{cases}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

For to vektorer  $a^\mu$  og  $b^\mu$  gjelder med  $\not{a} = a^\mu \gamma_\mu$ .

$$\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2a^\mu b_\mu.$$

For projeksjonsoperatorene  $\Lambda_\pm = \frac{\pm \not{p} - mc}{2mc}$  gjelder

$$\Lambda_+ u = u \quad \Lambda_- v = v \quad \Lambda_+ v = 0 \quad \Lambda_- u = 0.$$