UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. F. Bakke
Tlf. 3649

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Mandag 13. august 1990
kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

a) Skriv opp Dirac-likningen for en partikkel med masse M og ladning Q i et elektromagnetisk felt $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \vec{A})$ og redegjør for de størrelsene som inngår.

b) Finn $u(P)$ i løsningen

$$\psi(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} u(P)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{P}\vec{r}-Et)} \quad , \; P = (\frac{1}{c}\, E, \vec{P})$$

av Dirac-likningen for en fri partikkel $(A^\mu = 0)$ med impuls $\vec{P}$ og positiv energi $E > 0$ når en bruker standardrepresentasjonen for γ^μ, og vis at for lave impulser $\frac{|\vec{P}|}{Mc} \ll 1$ har en tilnærmet

$$\psi(\vec{r}) \approx \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{(\vec{P})^2}{8M^2c^2}\right) \begin{pmatrix} X \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{P}}{2Mc}\, X \end{pmatrix} e^{\frac{i}{t}(\vec{P}\vec{r}-Et)}$$

Her er normeringen for 4-spinoren

$$u^+(P)\, u(P) = \frac{E}{Mc^2}$$

og for 2-spinoren $X^+X = 1$.

c) Vis at Dirac-likningen for en fri partikkel kan utledes fra Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - Mc\right)\psi$$

og finn den kanoniske konjugerte impuls π til ψ .

d) Ved kanonisk kvantisering av Dirac-likningen blir $\psi(\vec{r},t)$ og $\pi(\vec{r},t)$ operatorer som må oppfylle visse kvantiseringsbetingelser. Skriv opp disse betingelsene.

e) ψ kan skrives ut ved hjelp av kreasjons- og annihilasjons-operatorene for elektroner $(b^{+}(\vec{P},s),\ b(\vec{P},s))$ og positroner $(d^{+}(\vec{P},s),\ d(\vec{P},s))$ med impuls $\vec{P}$ og helisitet s slik

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_{+} + \psi_{-}$$

$$= \sum_{s=\pm1} \int \frac{d^3P}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{Mc^2}{E}} \left[b(\vec{P},s)u(\vec{P},s)e^{-\frac{i}{\hbar}P_{\mu}x^{\mu}} + d^{+}(\vec{P},s)v(\vec{P},s)e^{\frac{i}{\hbar}P_{\mu}x^{\mu}} \right]$$

med

$$\left\{b(\vec{P},s),\ b^{+}(\vec{P}',s')\right\} = \delta_{ss'}\ \delta^3(\vec{P}-\vec{P}')$$

$$\left\{d(\vec{P},s),\ d^{+}(\vec{P}',s')\right\} = \delta_{ss'}\ \delta^3(\vec{P}-\vec{P}')$$

og alle de andre antikommutatorene lik 0 .
Kvantiseringsbetingelsene i d) er da oppfylt. (Trengs ikke vises).
Her er $u(\vec{P},s)$ og $v(\vec{P},s)$ 4-spinorene for henholdsvis elektronene og positronene.
Energioperatoren for feltet er gitt ved
$H = \int\psi^{+}\mathcal{H}\,\psi d^3r = \int\psi^{+}\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\ d^3r$.
Finn denne H for det fri elektron-positron feltet uttrykt ved krasjons- og annihilasjons-operatorene gitt ovenfor.

Oppgave 2

a) Tegn laveste ordens Feynman-diagram for spredning av et elektron (masse m og ladning e)

i) på et proton (M, e_p) $e^- p \rightarrow e^- p$

ii) på et fast Coulombpotensial $A^0 = -\frac{e_p}{4\pi}\frac{1}{r}$, $A^k = 0$ (Har satt $\epsilon_0 = 1$ og bruker $\hbar = c = 1$).

Tilstandsfunksjonen for et proton kan antas å ha samme form som Dirac-tilstandsfunksjonen for et elektron bare med en annen masse $M \gg m$ og motsatt ladning $e_p = -e > 0$.

b) Bruk Feynman-reglene til å skrive opp de algebraiske uttrykkene for disse prosessenes spredningsamplituder $S^{(i)}_{fi}$ og $S^{(ii)}_{fi}$ når energi og impuls for inn- og ut-gående elektron er henholdsvis $p_1 = (\epsilon_1, \vec{p}_1)$ og $p_2 = (\epsilon_2, \vec{p}_2)$ og for protonet $P_1 = (E_1, \vec{P}_1)$, $P_2 = (E_2, \vec{P}_2)$.

c) Vis at til laveste orden i elektron- og proton-impulsene $\vec{p}_i$ og $\vec{P}_i$ $(i = 1,2)$ er

$$S^{(i)}_{fi} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{(-ie^2)}{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2} (\chi_2^+ \chi_1)(X_2^+ X_1)\, \delta^4(p_2 + P_2 - p_1 - P_1)$$

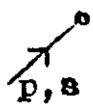
Her er χ_i og X_i 2-komponentspinorene for elektronet og protonet, Sammenlikn de to spredningsamplitudene $S^{(i)}_{fi}$ og $S^{(ii)}_{fi}$ med hverandre.

Regler for Feynman-diagram.

I impulsrommet

Ytre linjer:

Elektronlinjer:



$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} u(p,s)$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p,s)$

Positronlinjer:

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p,s)$

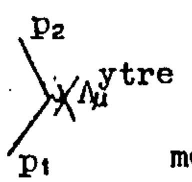
$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} v(p,s)$

Fotonlinjer:

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

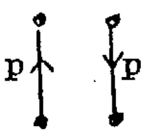
Ytre felt:



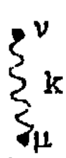
$-ie\gamma^{\mu} A_{\mu}^{ytre}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\ 2\pi\delta(E_1 - E_2)$

med $A_{\mu}^{ytre}(\vec{k}) = \int A_{\mu}^{ytre}(\vec{r})\ e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

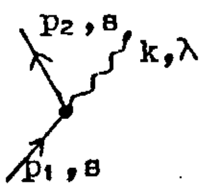


$\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ og $\int d^4 p$ $(\varepsilon \to 0)$



$\frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}$ og $\int d^4 k$

Knuter:



$-ie\gamma^{\lambda}(2\pi)^4\ \delta^4(p_1 - p_2 - k)$

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

$$\text{med metrikken} \quad g^{\mu\nu} = \begin{matrix} 1 & \text{når} & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når} & \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når} & \mu \neq \nu \end{matrix}$$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^+(\vec{p},s)\ u(\vec{p},s') = \frac{E}{mc^2}\,\delta_{ss'}$$

$$v^+(p,s)\ v(p,s') = \frac{E}{mc^2}\,\delta_{ss'}$$

$$u^+(\vec{p},s)\ v(-\vec{p},s') = 0$$