

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
Mandag 3. juni 1991
Tid: 0900-1300

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.
Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken*.

Oppgave 1:

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i QED, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$
2. $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$
3. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$
4. $e^- e^- \rightarrow \mu^- \mu^-$
5. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$
6. $e^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$
7. $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$
8. $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma \gamma$
9. $\gamma \rightarrow e^+ e^-$
10. $\gamma \gamma \rightarrow \gamma \gamma$

b) Se nå litt nærmere på prosessen $e^+ \gamma \rightarrow e^+ \gamma$:

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplitudene.
3. Se på denne prosessen fra et koordinatsystem der positronet på forhånd er i ro. Finn, som funksjon av energien ω til det innkommende fotonet, den maksimale energien som kan overføres til positronet.

c) Det finnes QED-bidrag av orden e^2 til energitettheten i vakuum: (i) Tegn Feynman-diagrammene for disse bidragene, og (ii) bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for disse bidragene.

Oppgave 2:

I denne oppgaven skal vi se på en modell for relativistiske Bosepartikler som er restrikkert til en tynn sirkel av omkrets L rundt en magnetisk fluks Φ . Denne modellen er definert ved virkningsintegralet

$$S = \int dt \int_{-L/2}^{L/2} dx \{ \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - [(\partial_x + ieA)\varphi]^* [(\partial_x + ieA)\varphi] \}, \quad (1)$$

der $A = \Phi/L$ er en konstant, og det komplekse feltet $\varphi(x)$ oppfyller periodisitetsbetingelsen

$$\varphi(x + L) = \varphi(x). \quad (2)$$

- a) Hva er bevegelsesligningen for feltet φ ?
 b) Anta at denne ligningen har egenmoder av formen

$$\varphi(x, t) = Ce^{-i(\omega t - kx)},$$

og bestem de mulige verdiene for k og ω .

- c) Bestem de kanonisk konjugerte impulsene Π_φ og Π_{φ^*} til henholdsvis φ og φ^* .
 d) Hva er Hamiltonfunksjonen H for systemet uttrykt ved feltene φ , φ^* , Π_φ og Π_{φ^*} ?
 e) Anta nå at φ -feltet kan utvikles i en Fourier-rekke av formen

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n a_n e^{-i(\omega_n t - k_n x)} + C_{-n} b_n^\dagger e^{i(\omega_{-n} t - k_{-n} x)}],$$

der $\omega_n \geq 0$. Hva blir de tilsvarende utviklingene for feltene φ^* , Π_φ og Π_{φ^*} ?

- f) Bestem konstantene C_n slik at de kanoniske lik-tid kommutatorene

$$[\Pi_\varphi(x, t), \varphi(x', t)] = [\Pi_{\varphi^*}(x, t), \varphi^*(x', t)] = -i\delta_{per}(x - x') \equiv -\frac{i}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-x')n/L}$$

blir oppfylt når settet $\{a_n, a_n^\dagger, b_n, b_n^\dagger \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ oppfyller standard kommuteringsregler for kreasjons- og annihilasjonsoperatorer.

- g) Hva er Hamiltonfunksjonen H for systemet uttrykt på normalordnet form ved kreasjons- og annihilasjonsoperatorene $\{a_n, a_n^\dagger, b_n, b_n^\dagger \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$?

- h) Grunntilstandsenergien E_0 for systemet er formelt et uttrykk av formen

$$E_0 = N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n.$$

(i) Hva er konstanten N ? (ii) Vis at E_0 er en symmetrisk og periodisk funksjon av fluksen Φ , og (iii) bestem denne perioden.









- i) For å kunne operere med endelige uttrykk definerer vi E_0 som


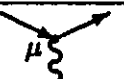
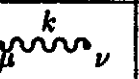
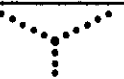


$$E_0 \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0^+} -N \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau \omega_n}.$$

Bestem fra dette uttrykket hvilke verdier for Φ som fører til lavest verdi på E_0 .

Vedlegg 1:

1 Feynmanregler for $-iT_{fi}$:

| 1. Utgående partikler | | | 2. Innkommende partikler | | |
|-----------------------|---|--------------------|--------------------------|--|--------------------|
| Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk | Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk |
| e^-, μ^-, \dots |  | $\bar{u}(p, s)$ | e^-, μ^-, \dots |  | $u(p, s)$ |
| e^+, μ^+, \dots |  | $v(p, s)$ | e^+, μ^+, \dots |  | $\bar{v}(p, s)$ |
| γ (foton) |  | $e_\mu(k, r)^*$ | γ (foton) |  | $e_\mu(k, r)$ |
| Uladet spinn-0 |  | 1 | Uladet spinn-0 |  | 1 |

| 3. Propagatorer | | | 4. Vekselvirkningsknuter | | |
|-------------------------|---|--|-----------------------------------|--|--------------------|
| Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk | V.virkning \mathcal{L}_{int} | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk |
| e^\pm, μ^\pm, \dots |  | $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ | $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ |  | $ie\gamma^\mu$ |
| γ (foton) |  | $\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$ | $-\frac{1}{3!}\mu\phi^3$ |  | $-i\mu$ |
| Uladet spinn-0 |  | $\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$ | $-\frac{1}{4!}\lambda\phi^4$ |  | $-i\lambda$ |

- i) Konservering av firer-impuls i hver knute.
- ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.
- iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.
- iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.