UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 3652

**Kontinuasjonseksamen i**
**Fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk**
Fredag 23. august 1991
Tid: 0900–1300

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae.*
Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken.*

## Oppgave 1:

Benytt

$$\vec{E}(\vec{x}_0;a) \equiv \frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} \int d^3x\, \vec{E}(\vec{x})\, e^{-[(\vec{x}-\vec{x}_0)/a]^2/2},$$
$$\vec{B}(\vec{x}_0;a) \equiv \frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} \int d^3x\, \vec{B}(\vec{x})\, e^{-[(\vec{x}-\vec{x}_0)/a]^2/2},$$

som uttrykk for de fri elektromagnetiske feltene midlet over et volum av lineær dimensjon $a$, og beregn vakuum-forventningsverdiene $F_i$ til disse størrelsene:

**a)**

$$F_1 = \langle 0|\, \vec{E}(\vec{x}_0;a)\cdot\vec{E}(\vec{x}_0;a)\, |0\rangle$$

**b)**

$$F_2 = \langle 0|\, \vec{B}(\vec{x}_0;a)\cdot\vec{B}(\vec{x}_0;a)\, |0\rangle$$

**c)**

$$F_3 = \langle 0|\, \vec{E}(\vec{x}_0;a)\cdot\vec{B}(\vec{x}_0;a)\, |0\rangle$$

Fourierutviklingen av de elektromagnetiske feltene står oppgitt i vedlegget.

## Oppgave 2:

Mandelstam-invariantene for en 2-partikkel → 2-partikkel spredningsprosess (der de to innkommende partiklene har masser $m_1$, $m_2$ og firer-impulser $p_1$, $p_2$, og de to utgående partiklene har masser $m_1'$, $m_2'$ og firer-impulser $p_1'$, $p_2'$) er definert som

$$
\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2, \\
t &= (p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2, \\
u &= (p_1 - p_2')^2 = (p_2 - p_1')^2.
\end{aligned}
$$

**a)** Vis at kombinasjonen

$$s + t + u$$

bare avhenger av massene til partiklene som er involvert i spredningsprosessen (altså ikke av firer-impulsene).

**b)** I massesentersystemet, definert ved at

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0,$$

kan energiene $E_1$, $E_2$, $E_1'$, $E_2'$ til de involverte partiklene uttrykkes ved $s$ og massene $m_1$, $m_2$, $m_1'$, $m_2'$. Finn denne sammenhengen.

## Oppgave 3:

**a)** Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$
2. $e^-\mu^+ \to e^+\mu^-$
3. $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$
4. $e^-e^+ \to e^-e^+$
5. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$
6. $\mu^- \to e^+\gamma$
7. $\gamma\gamma \to \gamma$
8. $\gamma\gamma \to e^+e^-$
9. $\gamma\gamma \to e^-\mu^+$
10. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$

**b)** Se nå litt nærmere på prosessen $e^+e^- \to e^+e^-\mu^+\mu^-$:

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden til denne prosessen.
2. Velg ut ett av disse diagrammene, og bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned det tilhørende algebraiske uttrykket for bidraget til spredningsamplituden.
3. Hva er den *minste* energien som positronet må ha for at prosessen skal kunne skje:
   (a) I massesentersystemet (dvs. når elektronet og positonet i begynnelsestilstanden beveger seg rett mot hverandre med samme energi)?
   (b) Når elektronet i begynnelsestilstanden er i ro (dvs. i laboratoriesystemet til dette)?

# 1 Fourierutvikling av de fri elektromagnetiske feltene

Vi har (i det 'naturlige' enhets-systemet)

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t),$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x},t),$$

med Fourierutviklingen

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{2|\vec{k}|}}\left[a_r(\vec{k})\vec{e}_r(\vec{k})\mathrm{e}^{-ikx} + a_r(\vec{k})^\dagger \vec{e}_r(\vec{k})^* \mathrm{e}^{ikx}\right],$$

der

$$[a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')^\dagger] = \delta_{rs}\delta(\vec{k}-\vec{k}'), \qquad \sum_r e^i_r(\vec{k})^* e^j_r(\vec{k}) = \delta^{ij} - k^i k^j/\vec{k}^2.$$

# 2 Feynmanregler for $-iT_{fi}$:

| 1. Utgående partikler | | | 2. Innkommende partikler | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk | Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk |
| $e^-, \mu^-, \cdots$ | $\longrightarrow$ $p, s$ | $\overline{u}(p,s)$ | $e^-, \mu^-, \cdots$ | $p, s \longrightarrow$ | $u(p,s)$ |
| $e^+, \mu^+, \cdots$ | $\longleftarrow$ $p, s$ | $v(p,s)$ | $e^+, \mu^+, \cdots$ | $p, s \longleftarrow$ | $\overline{v}(p,s)$ |
| $\gamma$ (foton) | $k, r$ | $e_\mu(k,r)^*$ | $\gamma$ (foton) | $k, r$ | $e_\mu(k,r)$ |
| Uladet spinn–0 | $\cdots\cdots k$ | 1 | Uladet spinn–0 | $k \cdots\cdots$ | 1 |

| 3. Propagatorer | | | 4. Vekselvirkningsknuter | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk | V.virkning $\mathcal{L}_{int}$ | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk |
| $e^\pm, \mu^\pm, \cdots$ | $\xrightarrow{p}$ | $\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$ | $e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ | $\mu$ | $ie\gamma^\mu$ |
| $\gamma$ (foton) | $\mu \overset{k}{\sim\!\sim} \nu$ | $\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$ | $-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$ | | $-i\mu$ |
| Uladet spinn–0 | $\cdots\overset{k}{\cdots}\cdots$ | $\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$ | $-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$ | | $-i\lambda$ |

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor $-1$ for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der $S$ er diagrammets symmetritall.