UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Lørdag 12.juni 1993

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

a) Skriv opp Dirac-likningen for et elektron med ladning $e = -|e|$ i et elektromagnetisk felt $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \vec{A})$ og redegjør for de størrelsene som inngår.

b) Skriv opp tilsvarende likning for et positron med ladning $e_1 = +|e|$ og vis at en mellom tilstandene for elektronet, ψ_e, og for positronet, ψ_p, har en sammenheng

$$\psi_e = C\,\psi_p^*$$

og bestem C når en bruker standardrepresentasjonen for Dirac-matrisene γ^μ.

c) Finn de to løsningene som i standardrepresentasjonen beskriver frie elektroner i ro ($\vec{p}=0$) med negativ energi ($E = -mc^2$) og spinn "opp" henholdsvis "ned" langs z-aksen.

d) Finn de positronløsningene som ifølge b) følger fra disse og angi deres energi og spinnretning.

Oppgave 2

a) Et elektron spredes elastisk mot et fast elektrostatisk Coulombpotensial

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{Ze}{4\pi r} .$$

Tegn laveste ordens Feynman diagram og vis at spredningsamplituden blir (benytter $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$)

$$S^{(1)}_{e_{fi}} = i \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{\sqrt{E_f E_i}} \frac{\bar{u}_f \gamma_0 u_i}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2} \delta(E_f - E_i) .$$

Her er $u_i = u(\vec{p}_i, s_i)$ spinoren for et elektron med positiv energi E_i, impuls $\vec{p}_i$ og helicitet s_i

$$\bar{u} = u^+ \gamma^0 .$$

b) Vis at det differensielle spredningstverrsnitt for prosessen da blir til første orden gitt ved

$$\frac{d\sigma_e^{(1)}}{d\Omega} = 4 \left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2 \frac{m^2}{|\vec{q}|^4} \left|\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right|^2 \quad \text{med} \quad \vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

b) Vis at $P_\pm = \frac{m \pm \not{p}}{2m}$ er projeksjonsoperator for løsninger av Dirac-likningen for fri partikler med henholdsvis positiv og negativ energi og benytt dette til å regne ut til laveste orden det differensielle spredningstverrsnitt for upolariserte elektroner mot Coulomb potensialet ovenfor.

c) Et positron spredes mot det samme Coulombpotensialet. Tegn laveste ordens Feynman-diagram. Skriv opp spredningsmatrisene $S^{(1)}_{p_{fi}}$ og regn ut det tilhørende differensielle spredningstverrsnitt $\frac{d\sigma_p^{(1)}}{d\Omega}$ for upolariserte positroner.

Finn forholdet mellom positron-og elektron-tverrsnittene

$$\frac{d\sigma_p^{(1)}}{d\Omega} \bigg/ \frac{d\sigma_e^{(1)}}{d\Omega}$$

d) **Tegn annen ordens diagram for de to prosessene og redegjør kort for at forholdet mellom de to tverrsnittene til annen orden**

$$\frac{d\sigma_p^{(2)}}{d\Omega} \bigg/ \frac{d\sigma_e^{(2)}}{d\Omega}$$

ikke blir det samme som i c).

Regler for Feynman-diagram.

I impulsrommet

(Har satt $\hbar = c = 1$)

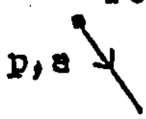
Ytre linjer:

Elektronlinjer:

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} u(p,s)$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p,s)$

Positronlinjer:



$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p,s)$

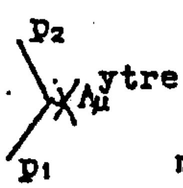
$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} v(p,s)$

Fotonlinjer:

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

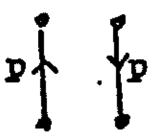
Ytre felt:



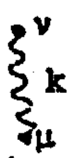
$-ie\gamma^{\mu} A_{\mu}^{ytre}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\; 2\pi\delta(E_1 - E_2)$

med $A_{\mu}^{ytre}(\vec{k}) = \int A_{\mu}^{ytre}(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

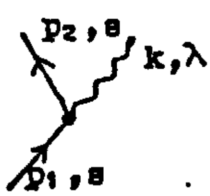


$\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ og $\int d^4p$ $(\varepsilon \to 0)$



$\frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}$ og $\int d^4k$

Knuter:



$-ie\gamma^{\lambda}(2\pi)^4\, \delta^4(p_1 - p_2 - k)$

Lukket fermionering:  ekstra faktor − 1.

Flere diagram til samme prosess adderes med $(-1)^{P_{ferm}}$ foran hvor P_{ferm} = antall permutasjoner av ytre fermioner i forhold til valgt utgangsdiagram.

Vedlegg 2

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

med metrikken $g^{\mu\nu} = \begin{matrix} 1 & \text{når} & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når} & \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når} & \mu \neq \nu \end{matrix}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] .$$

Spinn og helisitetsoperatorene

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \; , \; \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_p = \frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^+(\vec{p},s)\; u(\vec{p},s') = \frac{E}{mc^2}\,\delta_{ss'} \qquad \bar{u}(\vec{p},s)\; u(\vec{p},s') = \delta_{ss'}$$

$$v^+(\vec{p},s)\; v(\vec{p},s') = \frac{E}{mc^2}\,\delta_{ss'} \qquad \bar{v}(\vec{p},s)\; v(\vec{p},s') = -\delta_{ss'}$$

$$u^+(\vec{p},s)\; v(-\vec{p},s') = 0 \qquad \bar{u}(\vec{p},s)\; v(\vec{p},s') = 0$$

$$\bar{u}(\vec{p},s) = u^+(\vec{p},s)\gamma^0$$

Fullstendighetsrelasjon

$$\sum_{s=1}^{2} [u_\alpha(\vec{p},s)\; \bar{u}_\beta(\vec{p},s) - v_\alpha(\vec{p},s)\; \bar{v}_\beta(\vec{p},s)] = \delta_{\alpha p}$$

Sporformler

$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

$\mathrm{Sp}1 = 4$

$\mathrm{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$

$\mathrm{Sp}(\gamma_\kappa\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4(g_{\kappa\lambda}g_{\mu\nu} - g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} + g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu})$

mens sporet av et produkt med et ulike antall γ-matriser blir 0.