UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Bakke for Alex Hansen
Tlf. 3649

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Lørdag 20. august 1994
kl. 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

a) Vi starter med litt generell énpartikkel kvantemekanikk. Anta at vi har en Hamiltonfunksjon $H(t) = H_0 + V(t)$, hvor H_0 er tidsuavhengig og $[H_0, V(t)] = 0$. Schrödingerligningen for dette systemet er

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_S(t)\rangle = H(t)|\Psi_S(t)\rangle \tag{1.1}$$

i Schrödingerbildet. Vi definerer tilstanden $|\Psi_I(t)\rangle$ i *vekselvirknings* eller *Diracbildet* som

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0t}|\Psi_S(t)\rangle\ . \tag{1.2}$$

Vis at (1.1) omformes til

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle = V(t)|\Psi_I(t)\rangle \tag{1.3}$$

i dette bildet.

b) Tidsutviklingsoperatoren $U(t_f, t_i)$ defineres gjennom ligningen

$$|\Psi_I(t_f)\rangle = U(t_f, t_i)|\Psi_I(t_i)\rangle \ . \tag{1.4}$$

Integrér (1.3) og vis at

$$U(t_f, t_i) = \mathcal{T} e^{-i\int_{t_i}^{t_f} dt V(t)} \ , \tag{1.5}$$

hvor $\mathcal{T}$ er tidsordningsoperatoren.

c) La oss nå anta at vårt system er en harmonisk oscillator påvirket av en ytre (ikkekvantisert) kraft $f(t)$, slik at

$$H = \left(\tfrac{1}{2m}p^2 + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) - f(t)x \ . \tag{1.6}$$

I vekselvirkningsbildet utvikler x seg i tiden som

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\left(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}\right) \ . \tag{1.7}$$

Vis at tidsutviklingsoperatoren kan skrives som

$$U(t_f, t_i) = e^{i(a\tilde{f}^*(\omega) + a^\dagger \tilde{f}(\omega))} \ , \tag{1.8}$$

hvor vi har definert

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega t} f(t) \ . \tag{1.9}$$

Når $t_i \to -\infty$ og $t_f \to \infty$ blir $\tilde{f}(\omega)$ den Fourier transformerte av $f(t)$.

d) Vi har nå bruk for *Baker-Hausdorf* teoremet

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} \ , \tag{1.10}$$

hvor A og B er operatorer som er slik at $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Vis dette teoremet.

e) Bruk nå (1.10) til å vise at

$$U(t_f, t_i) = e^{ia^\dagger \tilde{f}(\omega)} e^{ia\tilde{f}^*(\omega)} e^{-|\tilde{f}(\omega)|^2/2} \ . \tag{1.11}$$

f) Bruk dette uttrykket til å finne sannsynligheten for at oscillatoren vår som vi antar befinner seg i grunntilstanden $|0\rangle$ ved tiden t_i, vil ende opp i tilstanden $|n\rangle = [(a^\dagger)^n/\sqrt{n!}]|0\rangle$ ved tiden t_f. Hva er midlere antall eksitasjoner ved t_f?

g) Vi skal nå bruke disse resultatene til å studere lysemisjon fra en klassisk elektrisk strøm. Vi har altså en vekselvirkningsterm (når vi ignorerer Coulombvekselvirkningen)

$$V(t) = \int d^3\vec{x}\mathcal{H}_I(x) = -\int d^3\vec{x}\vec{A}(x)\cdot\vec{j}(x) \tag{1.12}$$

hvor $\vec{A}$ er den romlige komponenten av det elektromagnetiske vektorpotensialet

$$A^\mu(x) = \sum_{k,\alpha} \sqrt{\frac{1}{2Vk^0}} \left[\epsilon^\mu_\alpha(k) a_\alpha(k) e^{-ikx} + \epsilon^\mu_\alpha(k) a^\dagger_\alpha(k) e^{+ikx}\right] . \tag{1.13}$$

Hva er sannsynligheten at strømmen $\vec{j}(x)$ fortsatt ikke har emitert noen lyskvanter ved tiden $t_f \to \infty$ når det ikke var noen tilstede ved tiden $t_i \to -\infty$. Hva er sannsynligheten for emisjon av et foton med energi k^0 og polarisasjon $\epsilon^\mu_\alpha(k)$ i løpet av tiden $t_f - t_i$, og hva er sannsynligheten for emisjon av *to* fotoner? Hva er midlere antall fotoner med energi k^0 og polarisasjon $\epsilon^\mu_\alpha(k)$ ved t_f?

<u>Oppgave 2</u>

a) Tegn Feynman diagrammene som gir bidrag til spredningsamplituden til laveste og nest laveste orden for prosessene $e^+e^- \to \gamma\gamma$ og $e^+e^- \to e^+e^-$.

b) Bruk Feynmanreglene til å skrive ned Feynman amplituden $\mathcal{M}$ for diagrammene

c) Forklar med ord hvorfor prosessene $e^- \to e^-\gamma$ og $e^-\gamma \to e^-\gamma\gamma$ ikke er observert.

d) I oppgave 1g) over regnet vi ut sannsynligheten for at en elektrisk strøm i vakuum skal produsere *ett* foton. Hvordan kan denne sannsynligheten være forskjellig fra null sett i lys av punkt 2c) over?