

UNIVERSITETET I TRONDHEIM  
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Alex Hansen

Tlf. 93649

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Mandag 12. juni 1995

kl. 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung  
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae  
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

Vi skal i denne oppgave sammenligne Maxwells ligninger med Dirac ligningen. Maxwells ligninger uten kilder er

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

og

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

a) Vis at Maxwells ligninger (2) og (4) kan skrives på formen

$$i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \vec{S} \cdot \vec{\nabla} i \vec{B} \quad (5)$$

og

$$i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \vec{S} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}, \quad (6)$$

hvor

$$(S_k)_{ij} = -i \epsilon_{kij}, \quad (7)$$

og  $(S_k)_{ij}$  er  $ij$ -komponenten av matrise  $S_k$ , som igjen er  $k$ -komponenten av  $\vec{S}$ . Videre er

$$\epsilon_{kij} = \begin{cases} +1, & \text{hvis } kij \text{ er en like permutering av } 123; \\ -1, & \text{hvis } kij \text{ er en odde permutering av } 123; \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (8)$$

b) Bruk regelen  $\epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$  (summasjon over like indekser) til å vise at komponentene til  $\vec{S}$  kommuterer som spinnkomponenter.

c) Vi definerer nå matrisene

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & S_i \\ S_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Vi lar videre

$$\psi^T = (\vec{E}, i\vec{B}) = (E_1, E_2, E_3, iB_1, iB_2, iB_3) \quad (10)$$

hvor "T" betyr transponering. Vis at vi da kan skrive ligningene (5) og (6) på den kompakte formen

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi. \quad (11)$$

d) Bruk de opprinnelige Maxwells ligninger til å finne antikommuteringsrelasjonene  $\{\alpha_i, \alpha_j\}$ . (Hint: Tenk på hvordan man bestemmer tilsvarende antikommutatorer ved hjelp av Dirac ligningen.)

e) La oss definere matrisene  $\gamma^\mu$  hvor

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

og

$$\gamma^i = \alpha_i. \quad (13)$$

Da kan (11) skrives på formen

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0. \quad (14)$$

La oss nå utføre en Lorentz transformasjon  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  og  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = L(\Lambda)\psi(x)$ . Hva vil det si at en ligning som (14) er kovariant?

f) Vis at ligningen

$$L(\Lambda) \gamma^\mu L(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (15)$$

gir en tilstrekkelig betingelse for at (14) er kovariant. Den er også nødvendig.

g) Er (14) kovariant?

### Oppgave 2

I det følgende diskuterer vi fermioner.  $\gamma^\mu$  er Dirac matrisene.

a) Vi definer matrisen

$$C = i\gamma^2\gamma^0, \quad (16)$$

Vis at  $C^{-1} = i\gamma^0\gamma^2$ .

b) Når vi oppgir at  $(\gamma^0)^T = \gamma^0$ ,  $(\gamma^1)^T = -\gamma^1$ ,  $(\gamma^2)^T = \gamma^2$  og  $(\gamma^3)^T = -\gamma^3$  i standardrepresentasjonen, vis at

$$C(\gamma^\mu)C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T. \quad (17)$$

“T” betyr transponering.

c) Bruk disse resultatene til å vise at hvis  $\psi$  er en løsning av Dirac ligningen

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0, \quad (18)$$

så er  $\psi_c = C\bar{\psi}^T$  en løsning av ligningen

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi_c = 0. \quad (19)$$

$C$  er derfor ladningskonjugasjonsoperatoren.



d) Diagrammene over viser to fermionløkker med  $n$  foton-fermionknuter. Bruk Feynmanreglene til å skrive ned amplitudene for disse. Kall amplituden for diagrammet til venstre for  $\mathcal{M}_a$  og det til høyre for  $\mathcal{M}_b$ .

e) Bruk  $C$  definert i (16) til å vise at

$$\mathcal{M}_b = (-1)^n \mathcal{M}_a. \quad (20)$$

Kommentar: For odde  $n$ , kanselerer diagrammene hverandre. Diagram som inneholder fermionløkker med et odde antall foton-fermionknuter kan ignoreres. Dette er *Furrys teorem*.

### Oppgave 3

a) Fotonpropagatoren er

$$iD_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (21)$$

Vis at inklusjon av laveste ordens korreksjon til denne på grunn av kreasjon og annihilasjon av virtuelle elektron-positron par leder til

$$iD_F^{\mu\nu}(k) \rightarrow iD_F'^{\mu\nu}(k) = iD_F^{\mu\nu}(k) + iD_F(k)^{\mu\alpha} i\Pi_{\alpha\beta}(k) iD_F(k)^{\beta\nu}(k). \quad (22)$$

Hva er  $\Pi_{\alpha\beta}(k)$ ?

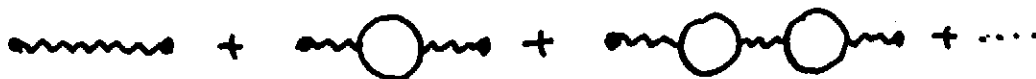
b) I grensen når  $k^2 \rightarrow 0$ , har vi at

$$\Pi_{\alpha\beta}(k) = a^2 g_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(k^2), \quad (23)$$

hvor  $a^2$  er en konstant. (Ikke vis dette.) Bruk operatoridentiteten

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots \quad (24)$$

til å regne ut korreksjonen til fotonpropagatoren (21) ved å summere diagram av typen som er vist nedenfor i grensen  $k^2 \rightarrow 0$ . Gi en tolkning av  $a$ .



c) Bruk uttrykket for  $\Pi_{\alpha\beta}(k)$  som ble funnet i a) til å bestemme hvor stor  $a$  er.

Regler for Feynman-diagram.

I impulsrommet

(Har satt  $\hbar = c = 1$ )

Ytre linjer:

Elektronlinjer:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} u(p, s) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p, s)$$

Positronlinjer:

$$\begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p, s) \quad \begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} v(p, s)$$

Fotonlinjer:

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$$

Ytre felt:

$$\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{X} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} A_{\mu}^{\text{ytre}} \quad -ie\gamma^{\mu} A_{\mu}^{\text{ytre}} (\not{p}_2 - \not{p}_1) 2\pi\delta(E_1 - E_2)$$

med  $A_{\mu}^{\text{ytre}}(k) = \int A_{\mu}^{\text{ytre}}(\vec{r}) e^{ik\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ p \end{array} \quad \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4p \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ \downarrow \\ k \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \downarrow \\ k \end{array} \quad \frac{-1}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4k$$

Knuter:

$$\begin{array}{c} p_2, s \\ \diagdown \\ \text{X} \\ \diagup \\ p_1, s \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \quad -ie\gamma^{\lambda} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k)$$

Lukket fermionering:



ekstra faktor  $-1$ .

Flere diagram til samme prosess adderes med  $(-1)^{P_{\text{ferm}}}$  foran hvor  $P_{\text{ferm}}$  = antall permutasjoner av ytre fermioner i forhold til valgt utgangsdiagram.

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

med metrikken  $g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{når } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når } \mu \neq \nu \end{cases}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Spinn og helisitetsoperatorene

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_p = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^\dagger(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$v^\dagger(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$u^\dagger(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, s') = 0$$