

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE  
UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 9 36 52

**Eksamen i fag 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK**

Lørdag 15. mai 1999

Tid: 09:00—14:00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling*.

Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.

Øgrim: *Størrelser og enheter i fysikken*

Dette eksamenssettet er på 3 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

**Oppgave 1:**

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1.  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
2.  $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$
3.  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$
4.  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$
5.  $\mu^- \rightarrow \mu^-e^+e^-$
6.  $\mu^-\gamma \rightarrow \mu^-e^+e^-$
7.  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

b) Se nå i litt mer detalj på Möller spredning,  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ .

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammet alle nødvendige impulser og indekser. Anta at de innkommende elektronene har kvantetall  $p_i, s_i, i = 1, 2$ , og de utgående elektronene kvantetall  $p'_f, s'_f, f = 1, 2$ . Innfør videre  $q = p_1 - p'_1$  og  $q' = p_1 - p'_2$ .
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden  $M_{fi}$ .

3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet trenger vi blant annet det midlede amplitudekvadratet

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, s_f\}} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^* \quad (1)$$

der summen går over alle spinntilstandene til de innkommende og utgående partiklene. Uttrykket over kan omskrives til en sum over spor av  $\gamma$ -matriser. Vis at ett av leddene i denne summen kan skrives på formen

$$\mathcal{F}(q) \times \text{Tr} \{ \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}'_1 + m_e) \} \text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}'_2 + m_e) \}, \quad (2)$$

og bestem funksjonen  $\mathcal{F}(q)$ .

4. Beregn produktet av sporene over,

$$Q \equiv \text{Tr} \{ \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}'_1 + m_e) \} \text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}'_2 + m_e) \}. \quad (3)$$

Uttrykk svaret ved skalarprodukt mellom de involverte firer-impulsene.

### Oppgave 2:

Fourier-utviklingen for et fritt, reellt Klein Gordon felt (definert ved Lagrangetettheten  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$ ) lyder

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k}} [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}]. \quad (4)$$

- a) Skriv ned den tilsvarende Fourier-utviklingen for den kanonisk konjugerte impulstettheten  $\pi_\varphi(x) \equiv \pi(x)$ .
- b) Det er vanlig å dekomponere disse feltene i positiv frekvens,  $\varphi^{(+)}(x)$ ,  $\pi^{(+)}(x)$ , og negativ frekvens,  $\varphi^{(-)}(x)$ ,  $\pi^{(-)}(x)$  deler. Beskriv denne dekomposisjonen.
- c) Beregn vakuum-forventningsverdien

$$\langle 0 | \varphi(x) \pi(y) | 0 \rangle. \quad (5)$$

Uttrykk svaret som en kommutator mellom noen av feltene  $\varphi^{(\pm)}(x)$ ,  $\pi^{(\pm)}(y)$ .

- d) Vi ser så på en generell én-partikkel tilstand

$$|f\rangle = \int d^3 k f(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \equiv \varphi_f^{(-)} |0\rangle. \quad (6)$$

Skriv ned det tilsvarende uttrykket for  $\langle f |$ . Hvilken betingelse må  $f(\mathbf{k})$  oppfylle for at denne tilstanden skal være normert,  $\langle f | f \rangle = 1$ ? (Vakuum-tilstanden antas å være normert,  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ .)

- e) Beregn matrise-elementene

$$\Phi_f(x) = \langle 0 | \varphi(x) | f \rangle, \quad \Pi_f(y) = \langle 0 | \pi(y) | f \rangle. \quad (7)$$

Vis at svarene kan uttrykkes som kommutatorer mellom noen av feltene  $\varphi^{(\pm)}(x)$ ,  $\pi^{(\pm)}(y)$ , og  $\varphi_f^{(\pm)}$ .

f) Beregn forventningsverdien (når  $\langle f | f \rangle = 1$ )

$$\langle f | \varphi(x) \pi(y) | f \rangle - \langle 0 | \varphi(x) \pi(y) | 0 \rangle. \quad (8)$$

Tips: Svaret kan uttrykkes ved funksjonene  $\Phi_f(x)$ ,  $\Pi_f(y)$  og deres kompleks konjugerte.

### Oppgave 3:

I denne oppgaven skal du analysere en variant av det fri elektromagnetiske felt, definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (9)$$

der  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$  kan uttrykkes ved vektorpotensialet  $\mathbf{A}$  som

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (10)$$

I første del av oppgaven skal  $\theta$  regnes som en konstant dimensjonsløs parameter. Det regnes hele tiden med naturlige enheter, dvs. der  $\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ .

- Finne den kanoniske konjugerte impulstettheten  $\Pi_{\mathbf{A}}$  til feltet  $\mathbf{A}$ .
- I en kanonisk kvantisering av denne teorien, hva skal lik tid (equal time) kommutatoren

$$[\dot{A}^j(\mathbf{x}, 0), A^k(\mathbf{y}, 0)]$$

være?

- Finne den tilhørende Hamiltontettheten  $\mathcal{H}$  for denne modellen.
- Bruk de generelle Euler-Lagrange ligningene til å finne bevegelsesligningene for  $\mathbf{A}$ -feltet.
- Anta nå at  $\theta$  er tidsavhengig,  $\theta = \mu t$ , der  $\mu$  er konstant parameter. Hvilken massedimensjon må  $\mu$  ha?
- Hva blir bevegelsesligningene for  $\mathbf{A}$ -feltet i dette tilfellet?

Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude  $\mathcal{M}_{fi}$  og tverrsnitt  $\sigma$

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \quad (11)$$

2 Noen Feynmanregler for  $-i\mathcal{M}_{fi}$ :

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
$\gamma$ (foton)		$e_\mu(k, r)^*$	$\gamma$ (foton)		$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
$\gamma$ (foton)		$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\phi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\phi^4$		$-i\lambda$

- i) Konservering av firer-impuls i hver knute.
- ii) Integrasjon  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$  over hver ubestemt impuls.
- iii) Faktor  $-1$  for hver lukket fermionsløyfe.
- iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- v) Kombinatorisk faktor  $1/S$ , der  $S$  er diagrammets symmetritall.

### 3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner :

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (12)$$

$$\sum_{r=1}^2 e_{\mu}(k, r) e_{\nu}^*(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (13)$$

### 4 Dirac's $\gamma$ -matriser

#### 4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

der  $I$  er en  $2 \times 2$  enhetsmatrise, og  $\sigma$  er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \text{ dvs. at } (\sigma \cdot \mathbf{a})(\sigma \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\sigma \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (16)$$

#### 4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \implies \not{p}\not{p} = p^2 \quad (17)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma_{\mu} = -2\gamma^{\nu} \implies \gamma_{\mu} \not{p} \gamma^{\mu} = -2\not{p} \quad (18)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma_{\mu} = 4\eta^{\nu\lambda} \implies \gamma_{\mu} \not{p} \not{q} \gamma^{\mu} = 4(pq) \quad (19)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\sigma} \gamma_{\mu} = -2\gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda} \gamma^{\nu} \implies \gamma_{\mu} \not{p} \not{q} \not{r} \gamma^{\mu} = -2\not{r} \not{q} \not{p} \quad (20)$$

#### 4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (21)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} = 0 \quad (22)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = 4\eta^{\mu\nu} \implies \text{Tr } \not{p} \not{q} = 4(pq) \quad (23)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} = 0 \quad (24)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\sigma} = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda}) \quad (25)$$

$$\implies \text{Tr } \not{p} \not{q} \not{r} \not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$