NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52

Eksamen i FY3464 KVANTEFELTTEORI
Torsdag 26. mai 2005
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*

Sensur legges ut på fagets webside, `http://web.phys.ntnu.no/~kolausen/FY3464/`, såsnart den er klar

Dette oppgavesettet er på 2 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1. Perturbativ korreksjon til vakuumenergi i QED
I denne oppgaven skal du skissere hvordan vakuumenergien i QED til orden e^2 kan relaterers til vakuumpolarisasjonen

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu\right)\Pi(q^2)$$

a) Tegn for hvert ladet fermion f de diagrammene av orden e^2 som bidrar til vakuum-energien i QED.

b) Argumenter for at det for hvert ladet fermion f bare er *ett* diagram som er forskjellig fra null.

c) Vis at hvert slikt diagram kan relateres til et integral over et tilsvarende bidrag til vakuumpolarisasjonen, $\Pi^{(f)}_{\mu\nu}(q)$. Du trenger ikke å gjøre noen integrasjoner eksplisitt. Du kan anta at alle integraler er endelige og at integrasjonsrekkefølgen ikke spiller noen rolle, slik det f.eks. er ved dimensjonell regularisering.

Oppgave 2. Masseavhengighet til anomalt magnetisk moment

Laveste ordens korreksjon til det anomale magnetiske momentet til leptonene (e, μ, τ) er gitt ved Schwinger-korreksjonen

$$a_\ell \equiv \frac{g_\ell - 2}{2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right). \tag{1}$$

Det kan argumenteres for at man i denne formelen bør bruke den løpende koblingskonstanten

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Pi_f(q^2)}, \tag{2}$$

der q^2 er av størrelsesorden $-m_\ell^2$, dvs. typisk størrelsesorden på den (euklidske) firerimpulsen som flyter gjennom foton-propagatoren når man evaluerer Feynmandiagrammet for a_ℓ.

a) Bruk dette argumentet til å anslå differansene $a_\mu - a_e$ og $a_\tau - a_e$.

Oppgitt: $m_e = 511\ \mathrm{keV/c^2}$, $m_\mu = 106.\ \mathrm{MeV/c^2}$, $m_\tau = 1.78\ \mathrm{GeV/c^2}$.

Laveste ordens bidrag til Π_f fra et lepton ℓ er gitt som

$$\Pi_f^{(\ell)}(q^2) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right) \int_0^1 \mathrm{d}t\ t(1-t)\ \log\left[1 - t(1-t)\frac{q^2}{m_\ell^2}\right] \approx \begin{cases} \frac{1}{6}\log\frac{-q^2}{m_\ell^2} - \frac{5}{18}, & \frac{-q^2}{m_\ell^2} \gg 1, \\ \frac{1}{30}\frac{-q^2}{m_\ell^2}, & \left|\frac{-q^2}{m_\ell^2}\right| \ll 1, \end{cases}$$

Oppgave 3.

I denne oppgave skal du se på (Higgs) modellen defineret ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*\,(D^\mu\varphi) + m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}\lambda\,(\varphi^*\varphi)^2 + \mathrm{i}L^\dagger\sigma^\mu D_\mu L - g\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\varphi^* L_\alpha L_\beta - \varphi L_\alpha^* L_\beta^*\right).$$

Her er $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, $D_\mu\varphi = (\partial_\mu + 2\mathrm{i}eA_\mu)\varphi$, $D_\mu L = (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)L$, L er en to-komponent (Weyl) spinor, $\sigma^\mu = (I, -\boldsymbol{\sigma})$ der $\boldsymbol{\sigma}$ er Paulimatrisene, og $\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Både m^2, λ og g antas å være reelle og positive. I denne modellen kan Higgs mekanismen antas å opptre.

a) Vis at $\mathcal{L}$ er gauge invariant. Dette innebærer at du også må angi transformasjonsreglene for alle feltene φ, L og A_μ.

b) Hva blir vakuumforventningsverdien til Higgsfeltet i denne modellen (før perturbative korreksjoner)?

c) Hva blir massen til vektorbosonet A_μ (før perturbative korreksjoner)?

d) Hva blir massen til den gjenværende Higgs partikkelen (før perturbative korreksjoner)?

e) Hva blir massen til fermionet L (før perturbative korreksjoner)?

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_f p'_f\,)\prod_{f=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3 p'_f}{(2\pi)^3\,2E'_f} \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{64\pi^2\,(p_1+p_2)^2}\,\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\;\mathrm{d}\Omega \qquad \text{for } n=2 \text{ i massesenter systemet} \tag{4}$$

2 Noen Feynmanregler for $-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow p, s$	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s \longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow p, s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s \longleftarrow\!\!\bullet$	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim k, r$	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\cdots k$	1	Uladet spinn–0	$k\ \cdots\cdots\bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{\text{int}}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\xrightarrow{p}\bullet$	$\dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	μ	$\mathrm{i}e\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu \overset{k}{\sim\!\sim\!\sim} \nu$	$\dfrac{-\mathrm{i}\eta_{\mu\nu}}{k^2 + \mathrm{i}\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-\mathrm{i}\mu$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\overset{k}{\cdots}\cdots\bullet$	$\dfrac{\mathrm{i}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-\mathrm{i}\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{5}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e_\nu^*(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{6}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{9}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{10}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{11}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{12}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{13}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{14}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{16}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{18}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$