

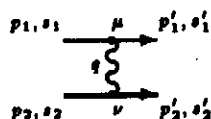
UNIVERSITETET I TRONDHEIM
 NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
 INSTITUTT FOR FYSIKK

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

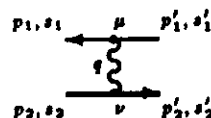
Løsningsforslag til
 Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
 Mandag 3. juni 1991
 Tid: 0900-1300

Oppgave 1:

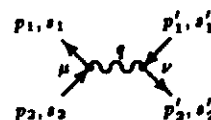
a) 1. $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$:



2. $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$:



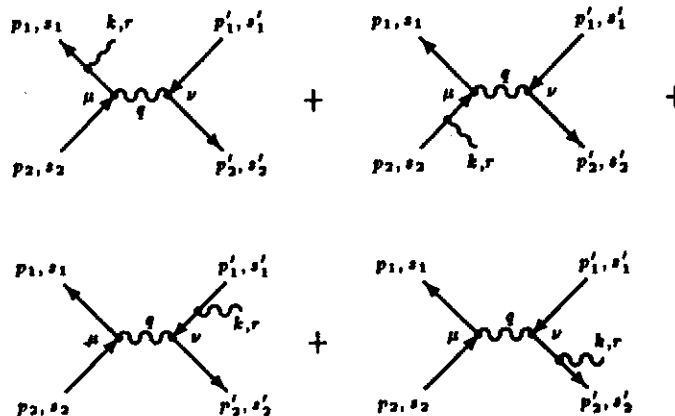
3. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$:



4. $e^- e^- \rightarrow \mu^- \mu^-$:

Denne prosessen er ikke mulig (hvertfall ikke i QED) på grunn av separat konservering av elektrontall og muontall.

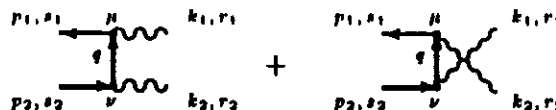
5. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$:



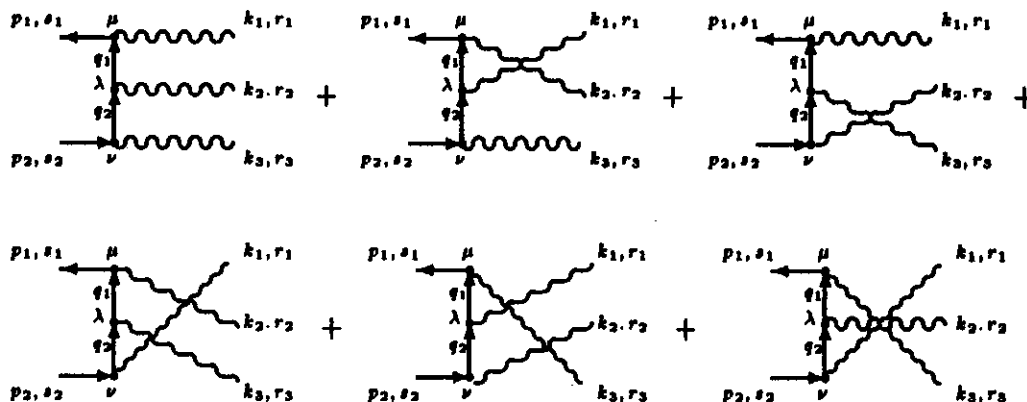
6. $e^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$:

Denne prosessen er ikke mulig (hvertfall ikke i *QED*) på grunn av separat konservering av elektrontall og muontall.

7. $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$:

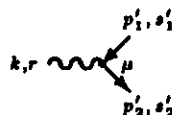


8. $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma \gamma$:

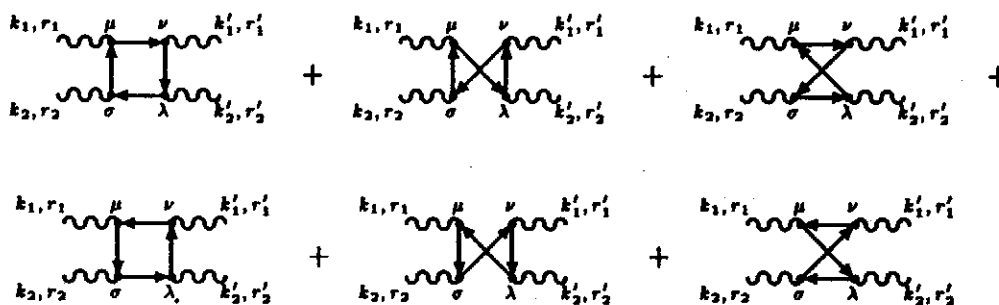


9. $\gamma \rightarrow e^+ e^-$:

Denne prosessen er ikke kinematisk mulig i vakuum (den invariante massen til et foton er null, mens et elektron-positron par må ha invariant masse større eller lik $2m_e$). Men det finnes likevel et Feynman-diagram for denne prosessen:

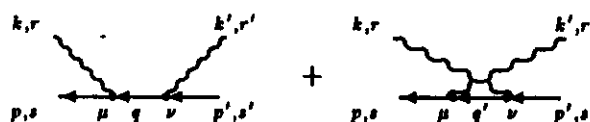


10. $\gamma \gamma \rightarrow \gamma \gamma$:



Her kan det fermionet som sirkulerer i sløyfen være e, μ, \dots . Men for lavenergetiske fotoner vil e -bidraget være størst (pga. lavest masse er det lettest å produsere elektron-positron par virtuelt).

b) 1. Vi har to Feynman-diagrammer av orden e^2 :



2. De tilhørende bidragene til sprednings-amplituden blir

$$-iT_{fi} = i(ie)^2 \bar{v}(p, s) \left\{ \frac{\not{\epsilon}(k, r)(-\not{q} + m)\not{\epsilon}^*(k', r')}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\not{\epsilon}^*(k', r')(-\not{q}' + m)\not{\epsilon}(k, r)}{q'^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} v(p', s'), \quad (1)$$

der $q = p + k$ og $q' = p - k'$. Merk fortegnet på impulsleddet i tellerne til fermion-propagatorene (firerimpulsen skal måles i pilens retning). I dette tilfellet vil det faktisk ikke ha noen praktisk konsekvens for tverrsnitt-beregningen,—fordi tverrsnittet blir det samme om vi multipliserer begge amplitudene med -1 , og fordi tverrsnittet viser seg å være en funksjon av m^2 . Men generelt, når bidrag fra mange amplituder skal adderes sammen, kan dette være en viktig detalj!

3. Vi velger et koordinatsystem slik at det innkommende fotonet og positronet har firerimpulser

$$k = (\omega, 0, 0, \omega), \quad p = (m, 0, 0, 0).$$

Maksimal energioverføring fås når fotonet spres rett bakover, dvs. slik at firerimpulsene i slutt-tilstanden er

$$k' = (\omega', 0, 0, -\omega'), \quad p' = (E, 0, 0, \sqrt{E^2 - m^2}).$$

Konservering av energi og impuls gir nå ligningene

$$\begin{aligned} E + \omega' &= m + \omega, \\ \sqrt{E^2 - m^2} - \omega' &= \omega. \end{aligned}$$

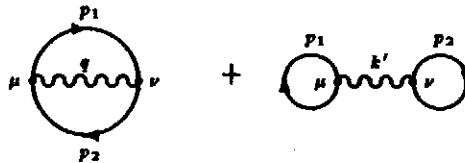
Addisjon av disse ligningene gir

$$\sqrt{E^2 - m^2} = m + 2\omega - E,$$

som ved kvadrering gir en enkel ligning for E (og derved energioverføringen $\Delta E \equiv E - m$). Svaret blir

$$\Delta E = \frac{2\omega^2}{m + 2\omega}. \quad (2)$$

c) (i) Til laveste orden (e^2) har vi to Feynman-diagrammer:



(ii) Det tilhørende algebraiske uttrykket for energitettheten blir

$$\frac{\Delta E_0}{V} = \frac{1}{2} e^2 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \times \left\{ \frac{(-1) \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)]}{(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)(p_2^2 - m^2 + i\epsilon)((p_1 - p_2)^2 + i\epsilon)} + \frac{(-1)^2 \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)] \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)]}{(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)(p_2^2 - m^2 + i\epsilon)(0 + i\epsilon)} \right\}. \quad (3)$$

Her bør en spesielt legge merke til

- Den kombinatoriske faktoren $\frac{1}{2}$.
- Faktorer (-1) for én lukket fermionsløyfe, og $(-1)^2$ for to fermionsløyfer.
- En faktor i for å gå fra vakuum-vakuum amplitude til energitetthet. (Totalt er i -regnskapet som følger: i^2 fra to spredningsknuter, i^2 fra to fermion-propagatorer, $-i$ fra foton-propagatoren, og—som allerede nevnt—en faktor i for å gå fra amplitude til energitetthet. Tilsammen $+1$.)
- Bidraget fra det siste diagrammet ser mistenkelig stort ut, siden det ikke flyter impuls gjennom fotonpropagatoren. Men i virkeligheten er det null, fordi

$$\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + m)] = 0.$$

Dette leddet kan tolkes som den klassiske Coulomb-energien

$$E_C = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

der $\rho(\vec{r})$ er ladningstettheten i vakuum (som altså er null—'Dirac-sjøen' har ingen ladning).

Oppgave 2:

a) Vi har

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi^*)} = \partial_t \varphi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \varphi^*)} = -(\partial_x + ieA)\varphi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = ieA(\partial_x + ieA)\varphi,$$

slik at Euler-Lagrange ligningen blir

$$[\partial_t^2 - (\partial_x + ieA)^2] \varphi(x, t) = 0. \quad (4)$$

b) Dersom vi antar egenmoder av formen

$$\varphi(x, t) = C e^{-i(\omega t - kx)},$$

så gir periodisitetsbetingelsen kravet $e^{ikL} = 1$, dvs. at de mulige verdiene for k er

$$k = k_n \equiv \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

Bevegelsesligningen (4) gir så dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = (k_n + eA)^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(n + \frac{e\Phi}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n + \zeta)^2,$$

der altså $\zeta \equiv e\Phi/2\pi$. Dvs.

$$\omega = \pm \omega_n, \quad \text{der } \omega_n \equiv \frac{2\pi}{L} |n + \zeta|. \quad (6)$$

c) De kanonisk konjugerte impulsene:

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*, \quad \Pi_{\varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi} \quad (7)$$

d) Vi får Hamiltonfunksjonen

$$H = \int dx \{ \Pi_{\varphi^*} \Pi_\varphi + [(\partial_x + ieA)\varphi]^* [(\partial_x + ieA)\varphi] \} \quad (8)$$

e) Utviklingen i Fourier-rekker blir

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_n a_n e^{-i(\omega_n t - k_n x)} + C_{-n} b_n^\dagger e^{i(\omega_{-n} t - k_n x)} \right], \\ \varphi^*(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_{-n}^* b_n e^{-i(\omega_{-n} t - k_n x)} + C_n^* a_n^\dagger e^{i(\omega_n t - k_n x)} \right], \\ \Pi_\varphi(x, t) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\omega_{-n} C_{-n}^* b_n e^{-i(\omega_{-n} t - k_n x)} - \omega_n C_n^* a_n^\dagger e^{i(\omega_n t - k_n x)} \right], \\ \Pi_{\varphi^*}(x, t) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\omega_n C_n a_n e^{-i(\omega_n t - k_n x)} - \omega_{-n} C_{-n} b_n^\dagger e^{i(\omega_{-n} t - k_n x)} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

f) Vi ser på lik-tid kommutatoren mellom Π_φ og φ (og setter for enkelhets skyld $t = 0$). Husker på at

$$[a_m, a_n^\dagger] = [b_m, b_n^\dagger] = \delta_{mn},$$

(med alle de øvrige kommutatorene lik 0) og får

$$\begin{aligned} [\Pi_\varphi(x, 0), \varphi(x', 0)] &= \\ -i \sum_{m,n} \left\{ \omega_{-m} C_{-m}^* C_{-n} [b_m, b_n^\dagger] e^{i(k_m x - k_n x')} - \omega_m C_m^* C_n [a_m^\dagger, a_n] e^{-i(k_m x - k_n x')} \right\} &= \\ -i \sum_n \left\{ \omega_n |C_n|^2 e^{-ik_n(x-x')} + \omega_{-n} |C_{-n}|^2 e^{ik_n(x-x')} \right\} &= -i \sum_n 2\omega_n |C_n|^2 e^{-2\pi i(x-x')n/L}. \end{aligned}$$

Kravet om at

$$[\Pi_\varphi(x, t), \varphi(x', t)] = -\frac{i}{L} \sum_n e^{-2\pi i(x-x')n/L}$$

fastlegger så

$$|C_n| = \sqrt{\frac{1}{2\omega_n L}}. \quad (10)$$

g) Her kan man spare litt tid ved å merke at det står 'Hva er' og ikke 'Finn' eller 'Utledd' i oppgaveteksten. De som husker tilstrekkelig om harmoniske oscillatorer, eller kvantisering av det komplekse Klein-Gordon feltet, til å skrive ned Hamiltonfunksjonen direkte,

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \right) + \omega_{-n} \left(b_n^\dagger b_n + \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

får 90% uttelling på dette punktet. De resterende 10% går til dem som analyserer de komplikasjonene som følger av asymmetrien i spekteret, $\omega_n \neq \omega_{-n}$. Ved direkte utregning finner man

$$\begin{aligned} H_1 &= \int dx \Pi_\varphi \cdot \Pi_\varphi = \sum_{mn} \int dx \times \\ &\left\{ \omega_m \omega_n C_m C_n^* a_m a_n^\dagger e^{i(k_m - k_n)x} + \omega_{-m} \omega_{-n} C_{-m} C_{-n}^* b_m^\dagger b_n e^{-i(k_m - k_n)x} \right. \\ &\quad \left. - \omega_m \omega_{-n} C_m C_{-n}^* a_m b_n e^{i(k_m + k_n)x} - \omega_{-m} \omega_n C_{-m} C_n^* b_m^\dagger a_n^\dagger e^{-i(k_m + k_n)x} \right\} \\ &= \sum_n \left\{ \omega_n^2 |C_n|^2 L (a_n a_n^\dagger - b_n^\dagger a_n^\dagger) + \omega_{-n}^2 |C_{-n}|^2 L (b_n^\dagger b_n - a_{-n} b_n) \right\}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} H_2 &= \int dx [(\partial_x + ieA)\varphi]^* [(\partial_x + ieA)\varphi] = \sum_{mn} \int dx \times \\ &\left\{ (k_{-m} + eA)(k_{-n} + eA) C_{-m}^* C_n b_m b_n^\dagger e^{i(k_m - k_n)x} + \right. \\ &\quad (k_m + eA)(k_n + eA) C_m^* C_n a_m^\dagger a_n e^{-i(k_m - k_n)x} + \\ &\quad (k_{-m} + eA)(k_n + eA) C_{-m}^* C_n b_m a_n e^{i(k_m + k_n)x} + \\ &\quad \left. (k_m + eA)(k_{-n} + eA) C_m^* C_{-n} a_m^\dagger b_n^\dagger e^{-i(k_m + k_n)x} \right\} \\ &= \sum_n \left\{ \omega_n^2 |C_n|^2 L (a_n^\dagger a_n + b_{-n} a_n) + \omega_{-n}^2 |C_{-n}|^2 L (b_n b_{-n}^\dagger + a_{-n}^\dagger b_{-n}^\dagger) \right\}. \end{aligned}$$

Addisjon, normalordning, og bruk av at $2\omega_n^2 |C_n|^2 L = \omega_n$ gir så $H_1 + H_2 = H$ som sitert i ligning (11), slik man har lov å forvente. (Denne detaljregningen kan likevel ikke regnes som overflødig—den gir en høyst nødvendig kontroll på at man arbeider med korrekte dispersjonsrelasjoner og feltutviklinger.)

h) Grunntilstandsenergien blir i henhold til ligning (11):

$$E_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n = \left(\frac{2\pi}{L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n + \zeta|, \quad (12)$$

når vi bruker at $\sum_n \omega_{-n} = \sum_n \omega_n$. Slik dette står er det selvsagt et meningsløst uttrykk som må regulariseres. Men Ekte Felt-Teoretikere kan ikke la seg forstyrre av slike detaljer, så vi manipulerer først direkte med uttrykket slik det står:

- (i) Konstanten N som det ble spurt om er altså lik 1.
- (ii) Å skifte fortegn på ζ , $\zeta \rightarrow -\zeta$, kan kompenseres ved skifte summasjonsvariabel, $n \rightarrow -n$, så E_0 må være en symmetrisk funksjon av ζ (og derved Φ). Å øke ζ med 1, $\zeta \rightarrow \zeta + 1$, kan kompenseres ved å skifte summasjonsvariabel $n \rightarrow n - 1$, så energien må være en periodisk funksjon av ζ (og derved Φ).
- (iii) Siden $\zeta = e\Phi/2\pi$, og energien har periode 1 i ζ , blir perioden i Φ

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{e}. \quad (13)$$

Denne over-stokk-og-stein-analysen som vi har gjort her kan rettferdiggjøres dersom man kan finne et regularisert uttrykk for grunntilstandsenergien som fortsatt tillater variabelskiftene $n \rightarrow -n$ og $n \rightarrow n + 1$. Siste punkt i oppgaveteksten viser at det finnes en slik regularisering.

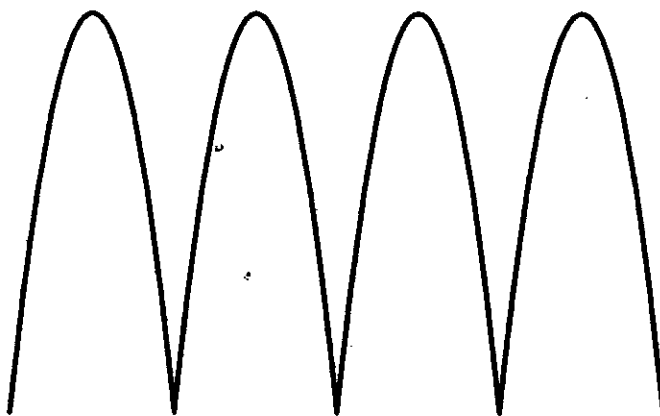
- 1) Vi kan først anta at ζ ligger i intervallet $[0, 1)$, og så utvide svaret ved bruk av symmetriene fra forrige punkt. Vi beregner først funksjonen

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau\omega_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2\pi\tau/L)(n+\zeta)} + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-(2\pi\tau/L)(-n-\zeta)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-[2\pi\tau\zeta/L]} + e^{-[2\pi\tau(1-\zeta)/L]} \right\} e^{-(2\pi\tau n/L)} \\ &= \frac{\cosh[(1-2\zeta)(\pi\tau/L)]}{\sinh(\pi\tau/L)} = \frac{L}{\pi\tau} + \left[\frac{1}{2}(1-2\zeta)^2 - \frac{1}{6} \right] \left(\frac{\pi\tau}{L} \right) + \dots \end{aligned}$$

Derfor:

$$E_0(\zeta) = - \left. \frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau) \right|_{\tau \rightarrow 0} = \infty + \left(\frac{\pi}{L} \right) \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(1-2|\zeta|)^2 \right], \quad (14)$$

utvidet periodisk slik at $E_0(\zeta + n) = E_0(\zeta)$. Dette blir minst når $\zeta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, dvs. for $\Phi = 0, \pm 2\pi/e, \pm 4\pi/e, \dots$, slik figuren under viser:



Kommentar: Det er en mystisk sammenheng mellom den relativistiske modellen som vi har sett på i denne oppgaven, og en modell for to ikke-relativistiske anyoner som vekselvirker via et harmonisk potensial! Annen virialkoeffisient $B_2(T)$ for anyoner har derfor essensielt samme form som på figuren over, der ζ svarer til den statistiske vinkelen ($\zeta = 0$ for bosoner, og $\zeta = \frac{1}{2}$ for fermioner). Denne sammenhengene kan generaliseres til å inkludere et masseledd for det relativistiske systemet—tilsvarende må man da inkludere en $1/r^2$ -vekselvirkning mellom anyonene.