

Løsninger

1a Kanoniske form: Lineariser $E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2$, bruker "minimal kobling" $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$
 $H\psi = [c\vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}) + \beta mc^2 + e\varphi]\psi = E\psi$ med $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

De hermiteske Dirac matrisene må oppfylle antikommuteringsreglene

$$\{\alpha^i, \alpha^j\}_+ = 2\delta^{ij} \quad \{\beta, \alpha^i\}_+ = 0 \quad \beta^2 = 1 \quad i, j = 1, 2, 3$$

I standardrepresentasjonen er 4×4 matriser gitt ved

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} \quad \text{hvor } \sigma^k = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \text{ er } 2 \times 2 \text{ Pauli-matr}$$

Spinor:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Kovariant form

Flytter over $E \rightarrow E - e\varphi$, multipliserer med β og setter $\beta\alpha^k = \gamma^k$, $\beta = \gamma^0$:

$$[\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) - mc]\psi = 0 \quad \text{med } p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

Betingelser: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ Matriks: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ (hermitisk) $\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k$ antihermiteisk

For elektron $e = -|e|$ $[\gamma^\mu(p_\mu + |e|A_\mu) - mc]\psi_e = 0$

b) For positron $e = +|e|$ $[\gamma^\mu(p_\mu - |e|A_\mu) - mc]\psi_p = 0$ $p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

Tar kompleks konjugert og multipliserer med C (4×4 matrise)

$$C[\gamma^\mu C^{-1} C(p_\mu^* - |e|A_\mu) - mc]\psi_p^* = 0 \quad p_\mu^* = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad A_\mu \text{ reell}$$

$$[-C\gamma^\mu C^{-1}(p_\mu + |e|A_\mu) - mc]C\psi_p^* = 0$$

Dette blir elektron likningen da $-C\gamma^\mu C^{-1} = \gamma^\mu$ og $C\psi_p^* = \psi_e$

I standardrepresentasjonen.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} \quad \text{er } \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \text{ imaginær, men vektorene } \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{1\dagger} = -\gamma^1, \gamma^{2\dagger} = -\gamma^2, \gamma^{3\dagger} = -\gamma^3 \text{ reell.}$$

Betingelserne blir da

$$C\gamma^0 = -\gamma^0 C \quad C \text{ kommuterer med } \gamma^0 \text{ og antikommuterer med de andre}$$

$$C\gamma^i = -\gamma^i C \quad C = a\gamma^2$$

$$C\gamma^2 = +\gamma^2 C \quad \text{de blir normert hvis } \psi_p \text{ er det når } a = e^{i\chi} \text{ (}\chi \text{ reell)}$$

$$C\gamma^3 = -\gamma^3 C \quad \text{Velger } a = i \text{ blir } C \text{ reell} \quad \underline{C = i\gamma^2}$$

c) Fri partikkel i ro: $\vec{p} = 0$, $p^0 = \frac{E}{c} = \frac{1}{c}(mc^2 + c^2(\vec{p}^2)) = mc + p_0$, $\vec{A} = 0$, $\varphi = 0$

$$(c\gamma^0 p_0 - mc^2)\psi = 0 \quad c p_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \left. \begin{matrix} (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - mc^2)\psi_a = 0 \\ (-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - mc^2)\psi_b = 0 \end{matrix} \right\} \psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

I standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

LC for
 Løsning for $E = mc^2 > 0$ $\psi_a = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = u_a \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-\frac{i}{\hbar} m c^2 t}$ $\psi_b = 0$ $u_a = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \text{konstant}$

for $E = -mc^2 < 0$ $\psi_a = 0$ $\psi_b = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = u_b \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar} m c^2 t}$ $u_b = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \text{konstant}$

4 løsninger:

$$\psi_0^{(i)} = u_0^{(i)} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_0^{(i)} t}$$

$$E_0^{(i)} = \begin{cases} mc^2 & i=1,2 \\ -mc^2 & i=3,4 \end{cases}$$

$$u_0^{(i)} = \begin{pmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_4^{(i)} \end{pmatrix}$$
 Løsning (i) = (3) og (4) her negativ energi.

$u^{(1)}$ og $u^{(3)}$ har spin komponent opp langs z-aksen, $u^{(2)}$ og $u^{(4)}$ ned.

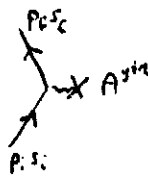
$$\sum_z u_0^{(i)} = \begin{pmatrix} \sigma^z & 0 \\ 0 & \sigma^z \end{pmatrix} u_0^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u_0^{(i)} = + u_0^{(1)}$$
, $\sum_z u_0^{(i)} = - u_0^{(2)}$

d) $\psi_p = (C^{-1} \psi_e)^* = i \gamma^2 \psi_e^*$ ($C^{-1} = i \gamma^2$)

$\psi_e^{(1)} \Rightarrow \psi_p^{(1)} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-\frac{i}{\hbar} m c^2 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-\frac{i}{\hbar} m c^2 t} = -\psi_e^{(2)}$ Positiv energi og spin ned

$\psi_e^{(2)} \Rightarrow \psi_p^{(2)} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-\frac{i}{\hbar} m c^2 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-\frac{i}{\hbar} m c^2 t} = \psi_e^{(4)}$ Positiv energi og spin opp.

Oppgave 2 a) Fra Feynman reglene ($\hbar = c = 1$)



$$S_{fi}^{(1)} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \left(\frac{m}{E_f} \right)^{1/2} \bar{u}(p', E_f) (-ie \gamma^\mu A_\mu(p_f, E_f)) 2\pi \delta(E_f - E_i) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \left(\frac{m}{E_i} \right)^{1/2} u(p, E_i)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \frac{m}{\sqrt{E_f E_i}} (-ie) (\bar{u}_f \gamma^\mu A_\mu u_i) 2\pi \delta(E_f - E_i)$$

da $A = (A_0, 0)$ med $A_0(\vec{q}) = - \int \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r = - \frac{Ze}{\epsilon_0 |\vec{q}|^2}$ $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

Gir (med $\epsilon_0 = 1$)

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{Ze^2}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_f E_i}} \frac{\bar{u}(p', E_f) \gamma^0 u(p, E_i)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2} 2\pi i \delta(E_f - E_i) \equiv K_{fi} 2\pi \delta(E_f - E_i)$$

b) Antall overganger pr tidrenhet til tilstander i impulsinterval d^3p_f

$$dW_{fi} = \frac{1}{T} |S_{fi}|^2 dnc \quad dnc = \frac{V d^3p_f}{(2\pi\hbar)^3} = d^3p_f \quad \text{med } T=1 \text{ og her } V = (2\pi)^3$$

T = overgangs tiden ($\rightarrow \infty$)

V = normering volumet (her = $(2\pi)^3$)

Diff. spredningstverrsnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{antall spredte partikler pr tidrenhet og pr romvinkelenhet}}{\text{innfallende intensitet}}$$

$$= \frac{dW_{fi}}{d\Omega} = \frac{\frac{1}{T} |S_{fi}|^2 dnc}{\frac{v_i}{(2\pi)^3}} \quad T \rightarrow \infty$$

$$= (2\pi)^4 |K_{fi}|^2 \frac{|\vec{p}_f| E_f dE_f}{v_i} \delta(E_f - E_i)$$

når en bruker $d\rho_f = |\vec{p}_f|^2 d\rho_f d\Omega = |\vec{p}_f| E_f dE_f d\Omega$

og $(\delta(E_f - E_i))^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2+t}^{T/2+t} e^{i(E_f - E_i)(t-t')} d(t+t') \right)$

$= \frac{T}{2\pi} \delta(E_f - E_i)$

Ved integrasjon om E_i og benyttelse av $v_i = \frac{|\vec{p}_i|}{E_i}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \frac{4}{(2\pi)^4} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_{E_i, E_f} \frac{|\bar{u}_i \gamma^\nu u_i|^2 E_i |\vec{p}_f| E_f \delta(E_f - E_i) dE_f}{|\vec{q}|^4 |\vec{p}_i|} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m^2}{|\vec{q}|^4} |\bar{u}_f \gamma^\mu u_f|^2$

bii) Dirac-likningen $(\not{p} - m)\psi = 0$ gir for

positiv-energi tilstand $u(p) e^{-ipx}$ $(\not{p} - m)u = 0$

og for negativ-energi tilstand $v(p) e^{ipx}$ $(\not{p} + m)v = 0$

Uten

$P_+ u = \frac{m + \not{p}}{2m} u = \frac{m + m}{2m} u = u$ $P_+ v = \frac{m + \not{p}}{2m} v = \frac{m - m}{2m} v = 0$

$P_- v = \frac{m - \not{p}}{2m} v = \frac{m + m}{2m} v = v$ $P_- u = \frac{m - \not{p}}{2m} u = \frac{m - m}{2m} u = 0$

Fra superposisjon av pos. og neg. energi tilstander proj. over
altså P_+ ut de positive

$P_+ \sum \int d^3p (a u(p,s) e^{-ipx} + b v(p,s) e^{ipx}) = \sum \int d^3p a u(p,s) e^{-ipx}$

og tilsvarende for P_-

For upolarisert spredning midles over innkommende og summeres over utgående polarisasjons retning:

$\frac{1}{2} \sum_{\pm s_i} \sum_{\pm s_f} |\bar{u}_f \gamma^\mu u_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\pm s_i} \sum_{\pm s_f} \bar{u}_i \gamma^\nu u_f \bar{u}_f \gamma^\mu u_i$

Utvider summen bl. å ta med både pos. og neg. energi ved å innføre proj. op.

$= \frac{1}{2} \sum_{\pm s_i} \sum_{\pm s_f} \bar{u}_i \gamma^\nu P_+ u_f \bar{u}_f \gamma^\mu P_+ u_i$

Fullstendighetsrelasjonen $\sum_{\pm s_i} u_i \bar{u}_i = 1$ gir så

$= \frac{1}{2} S_p (\not{0} P_+ \not{r} P_+)$

Gir her

$= \frac{1}{2} S_p (\not{r} \frac{m + \not{p}_i}{2m} \not{r} \frac{m + \not{p}_f}{2m}) = \frac{1}{2} \frac{1}{4m^2} (m^2 S_p(\not{r}\not{r}) + P_+ P_+ S_p(\not{r}\not{p}_i \not{r}\not{p}_f))$

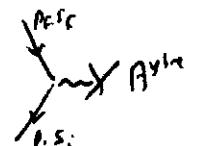
$= \frac{1}{8m^2} (m^2 4 + 4(P_{f0} P_{i0} - P_{fz} P_{iz} + P_{f0} P_{i0})) = \frac{1}{2m^2} (m^2 + 2E_f E_i - (E_f E_i - \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i))$

$= \frac{1}{2m^2} (E^2 + m^2 + |\vec{p}|^2 \cos\theta) = \frac{E^2 - |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta/2}{m^2}$ da elastisk $E_f = E_i$, $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$, $m^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$

Tverrsett for upol. spredning

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{upol}} = 4 \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{E^2 - |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta/2}{(2|\vec{p}| \sin \theta/2)^4}$

$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin \theta/2$

- c)  Vekselvirkningspotensial for elektron $V_e = -\frac{Ze^2}{4\pi r}$
for positron $V_p = \frac{Ze^2}{4\pi r}$

$$G_{ii} S_{pi}^{(1)} = -i \frac{Ze^2}{(4\pi)^2} \frac{m}{\sqrt{E_f E_i}} \frac{\bar{v}_f \gamma^0 v_i}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2} \delta(E_f - E_i)$$

som for elektronet bortsett fra faktoren -1
og u erstattet med v

$$G_{ii} \frac{d\sigma_p^{(1)}}{d\Omega} = 4 \left(\frac{Ze^2}{4\pi} \right)^2 \frac{m}{|\vec{q}|^4} |\bar{v}_f \gamma^0 v_i|^2 \text{ for polariserte positroner}$$

For upolariserte spredning f.eks. til 1. orden

$$\left(\frac{d\sigma_p^{(1)}}{d\Omega} \right)_{\text{upol.}} = \left(\frac{d\sigma_e^{(1)}}{d\Omega} \right)_{\text{upol.}}$$

$$\text{da } \frac{1}{2} \sum_{\pm s_i} \sum_{\pm s_f} |\bar{v}_f \gamma^0 v_i|^2 = \frac{1}{2} S_p(\gamma^0 P_+ \gamma^0 P_-)$$

$$= \frac{1}{2} S_p\left(\gamma^0 \frac{m - \not{p}_f}{2m} \gamma^0 \frac{m - \not{p}_i}{2m}\right) = \frac{1}{8m^2} (m^2 S_p(\gamma^0 \gamma^0) + (-\not{p}_{f\mu} \not{p}_{i\mu}) S_p(\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\mu))$$

Det samme som for elektronspredningen.

- d) For elektronspredning  For positronspredning 

Vekselvirkningspotensialet kommer inn kvadratisk slik at ~~kan~~

$$S_{efi}^{(2)} \sim \left(\frac{-Ze^2}{4\pi} \right)^2 \text{ og } S_{pfi}^{(2)} \sim \left(\frac{Ze^2}{4\pi} \right)^2 \text{ begge for samme fortegn.}$$

men $S_{efi}^{(1)}$ og $S_{pfi}^{(1)}$ hadde motsatt fortegn.

Dermed vil kryssleddene i tverrsnittene til 2. orden
få motsatte fortegn ved elektron- og ved positron-spredning

$$\frac{d\sigma_e^{(2)}}{d\Omega} \sim |K_{efi}^{(1)} + K_{efi}^{(2)}|^2 \sim |K_{efi}^{(1)}|^2 + 2\text{Re} K_{efi}^{(1)} K_{efi}^{(2)} + |K_{efi}^{(2)}|^2$$

$$\frac{d\sigma_p^{(2)}}{d\Omega} \sim |K_{pfi}^{(1)} + K_{pfi}^{(2)}|^2 \sim |K_{pfi}^{(1)}|^2 + 2\text{Re} K_{pfi}^{(1)} K_{pfi}^{(2)} + |K_{pfi}^{(2)}|^2$$

$$\frac{\text{Re} K_{efi}^{(1)} K_{efi}^{(2)}}{\text{Re} K_{pfi}^{(1)} K_{pfi}^{(2)}} < 0$$

$$\frac{d\sigma_e^{(2)}}{d\Omega} \neq \frac{d\sigma_p^{(2)}}{d\Omega}$$