

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE  
UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR FYSIKK

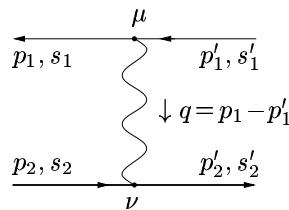
Eksamen gitt av Kåre Olaussen

**Løsningsforslag til**  
**Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk**  
Mandag 6. juni 1998  
Tid: 0900–1400

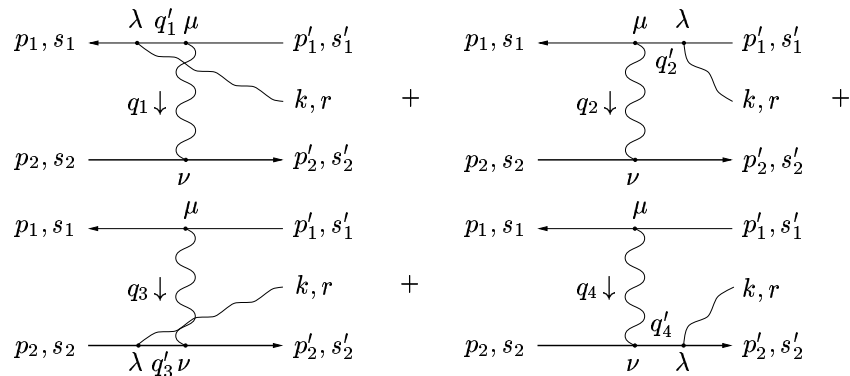
**Oppgave 1:**

a)

1. Laveste ordens Feynman diagram for prosessen  $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$  er



2. Prosessen  $e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+$  er ikke mulig (i QED eller noen annen eksperimentelt observert teori) på grunn av separat konservering av elektron- og myon-tall<sup>1</sup>.
3. Laveste ordens Feynman diagrammer for prosessen  $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^- \gamma$  er

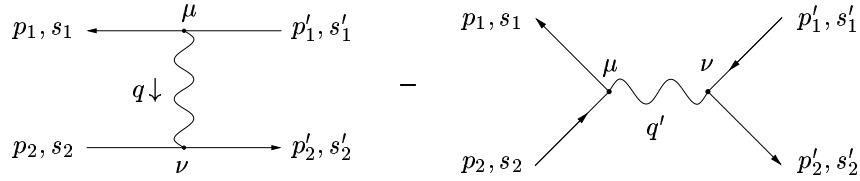


Her er  $q_1 = p'_2 - p_2$ ,  $q'_1 = k - p_1$ ,  $q_2 = p'_2 - p_2$ ,  $q'_2 = -k - p'_1$ ,  $q_3 = p_1 - p'_1$ ,  $q'_3 = p_2 - k$ ,  $q_4 = p_1 - p'_1$ , og  $q'_4 = k + p'_2$ . Merk at vi må måle impuls langs indre fermionlinjer ( $q'_1, \dots, q'_4$ ) i *pilens retning* for at det tilhørende algebraiske uttrykket for Dirac propagatoren skal bli lik  $i(\not{q}'_i + m)/(q_i'^2 - m^2 + i\epsilon)$ .

4. Prosessen  $e^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$  er ikke mulig (i QED eller noen annen eksperimentelt observert teori) på grunn av separat konservering av elektron- og myon-tall (men jfr. fotnoten om dette).

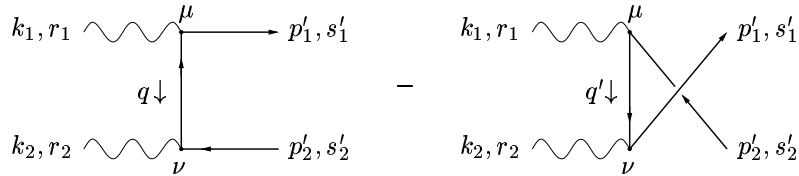
<sup>1</sup>Det er nylig (på NEUTRINO 98 konferansen i juni 1998) annonsert eksperimentelle resultater som tilsier at myon-tall ikke er en eksakt konserverert størrelse i fysikken. Dette gir indirekte støtte til mistanken om at prosesser som konverterer myoner til elektroner (og *vice versa*) kan forekomme i fysikken, bare svært skjeldent.

5. Laveste ordens Feynman diagrammer for prosessen  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$  er



Her er  $q = p_1 - p_1'$  og  $q' = p_1 + p_2$ .

6. Prosessen  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$  er ikke mulig (i QED eller noen annen eksperimentelt observert teori) på grunn av separat konservering av elektron- og myon-tall (men jfr. fotnoten om dette).
7. Prosessen  $\gamma \rightarrow e^+ e^-$  er ikke mulig i vakuum på grunn av konservering av energi og bevegelsesmengde, dvs. firer-impuls. Fotonet har invariant en masse  $k^2 = 0$ , mens elektron-positron systemet må ha en invariant masse  $(p_1' + p_2')^2 \geq 4m_e^2$ .
8. Laveste ordens Feynman diagrammer for prosessen  $\gamma \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$  er

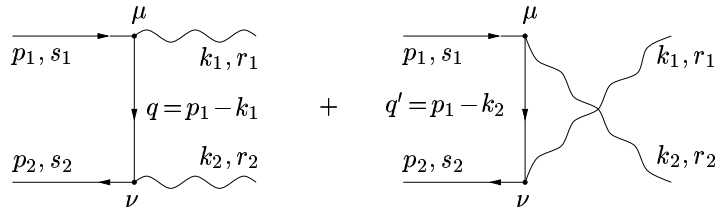


Her er  $q = k_1 - p_1'$  og  $q' = k_2 - p_2'$ .

9. Prosessen  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$  er ikke mulig (i QED) fordi antallet myoner minus antallet antimyoner er konservert, og tilsvarende for antallet elektroner minus antallet positroner. Merk at dette er ikke det samme som konservering av myon-tall ( $N_\mu - N_{\bar{\mu}} + N_{\nu_\mu} - N_{\bar{\nu}_\mu}$ ) eller elektron-tall ( $N_e - N_{\bar{e}} + N_{\nu_e} - N_{\bar{\nu}_e}$ ). Denne prosessen er mulig i svake vekselvirkninger.
10. Prosessen  $\mu^- \rightarrow e^+ e^- \mu^-$  er ikke mulig i vakuum på grunn av konservering av energi og bevegelsesmengde, dvs. firer-impuls. Det innkommende myonet har en invariant masse  $p^2 = m_\mu^2$ , mens  $e^+ e^- \mu^-$ -systemet har en invariant masse  $(p_1' + p_2' + p_3')^2 \geq (m_\mu + 2m_e)^2$ .

b) Vi skulle i denne oppgaven se i litt mer detalj på elektron-positron annihilasjon,  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$ .

1. Feynman-diagrammene for laveste ordens bidrag til denne prosessen er



Vi kaller de to amplitudene for henholdsvis  $\mathcal{M}_{fi}^{(a)}$  og  $\mathcal{M}_{fi}^{(b)}$ .

2. Vi har  $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)}$ , med

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(a)} = \frac{i (ie)^2}{q^2 - m_e^2} \bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\nu (\not{q} + m_e) \gamma^\mu u(p_1, s_1) e_\mu(k_1, r_1)^* e_\nu(k_2, r_2)^*, \quad (1)$$

med  $q = p_1 - k_1$ , og

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{i (ie)^2}{q'^2 - m_e^2} \bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\nu (\not{q}' + m_e) \gamma^\mu u(p_1, s_1) e_\mu(k_2, r_2)^* e_\nu(k_1, r_1)^*, \quad (2)$$

med  $q' = p_1 - k_2$ .

3. Vi har

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi}^{(a)*} &= \frac{e^2}{q^2 - m_e^2} \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\lambda (\not{p} + m_e) \gamma^\sigma v(p_2, s_2) e_\lambda(k_1, r_1) e_\sigma(k_2, r_2), \\ \mathcal{M}_{fi}^{(b)*} &= \frac{e^2}{q'^2 - m_e^2} \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\lambda (\not{p}' + m_e) \gamma^\sigma v(p_2, s_2) e_\lambda(k_2, r_2) e_\sigma(k_1, r_1),\end{aligned}$$

så når vi skriver ut spinor-indeksene  $(\alpha, \dots, \delta, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\delta})$  eksplisitt får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi}^{(a)} \mathcal{M}_{fi}^{(a)*} &= \frac{e^4}{(q^2 - m_e^2)^2} e_\mu(k_1, r_1)^* e_\nu(k_2, r_2)^* e_\lambda(k_1, r_1) e_\sigma(k_2, r_2) \times \\ &v(2)_{\bar{\delta}} \bar{v}(2)_\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\nu (\not{p} + m_e)_{\beta\gamma} \gamma_{\gamma\delta}^\mu u(1)_\delta \bar{u}(1)_{\bar{\alpha}} \gamma_{\bar{\alpha}\beta}^\lambda (\not{p} + m_e)_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \gamma_{\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\sigma\end{aligned}\quad (3)$$

Her er  $u(1)$  forenklet notasjon for  $u(p_1, s_1)$  osv. Vi summerer over  $r_1, r_2$  og bruker fullstendighetsrelasjonen,

$$\sum_r e_\mu(k, r)^* e_\nu(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd.}$$

Altså

$$\sum_{r_1, r_2} e_\mu(k_1, r_1)^* e_\nu(k_2, r_2)^* e_\lambda(k_1, r_1) e_\sigma(k_2, r_2) = \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} + \text{irrelevante ledd.}$$

Vi midler over  $s_1, s_2$  og bruker fullstendighetsrelasjonene,

$$\begin{aligned}\sum_{s_1} u(p_1, s_1)_\delta \bar{u}(p_1, s_1)_{\bar{\alpha}} &= (\not{p}_1 + m_e)_{\delta\bar{\alpha}}, \\ \sum_{s_2} v(p_2, s_2)_{\bar{\delta}} \bar{v}(p_2, s_2)_\alpha &= (\not{p}_2 - m_e)_{\bar{\delta}\alpha}.\end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}_{fi}^{(a)} \mathcal{M}_{fi}^{(a)*}} &= \frac{e^4}{4 (q^2 - m_e^2)^2} \times \\ &\text{Tr} \{ (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\nu (\not{p} + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\mu (\not{p} + m_e) \gamma_\nu \} \quad (4) \\ &\equiv \frac{e^4}{4 (q^2 - m_e^2)^2} T^{(aa)}.\end{aligned}$$

som avviker fra det (feilaktig!) oppgitte uttrykket i oppgaveteksten ved

$$(\not{p}_2 + m_e) \rightarrow (\not{p}_2 - m_e).$$

For å se dette må vi bruke den sykliske egenskapen til spor.

4.

Vi ekspanderer sporet i ligning (4) i potenser av  $m_e$ , og tar i betraktning at spor over et odde antall  $\gamma$ -matriser forsvinner:

$$\begin{aligned}T^{(aa)} &= \text{Tr} \{ \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \} + m_e^2 \text{Tr} \{ (\not{p}_2 \gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu) + (\not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu) \\ &+ (\not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu) - (\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu) - (\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu) - (\gamma^\nu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu) \} \\ &- m_e^4 \text{Tr} \{ \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \} \\ &= 4 \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p} \not{p}_1 \not{p} \} + m_e^2 \text{Tr} \{ -16 (\not{p}_2 \not{p}) + 4 (\not{p}_2 \not{p}_1) \\ &+ 16 (\not{p} \not{p}_1) - 16 (\not{p} \not{p}) \} - m_e^4 \text{Tr} \{ 16 \} \\ &= 32 (p_1 q) (p_2 q) - 16 (p_1 p_2) q^2 \\ &+ m_e^2 [64 (p_1 q) - 64 (p_2 q) + 16 (p_1 p_2) - 64 (q^2)] - 64 m_e^4.\end{aligned}\quad (5)$$

5. Vi kan utføre beregningen i massesenter systemet, for siden  $q^2$  er Lorentz invariant blir resultatet det samme uansett hvilket inertialsystem vi regner i.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{s}, 0, 0, \sqrt{s - m_e^2} \right), \\ p_2 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{s}, 0, 0, -\sqrt{s - m_e^2} \right) \\ k_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{s} \left( 1, \sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta \right), \\ k_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{s} \left( 1, -\sin \vartheta \cos \varphi, -\sin \vartheta \sin \varphi, -\cos \vartheta \right). \end{aligned}$$

Vi finner da at

$$q^2 = (p_1 - k_1)^2 = - \left( \vec{p}_1 - \vec{k}_1 \right)^2 = -\frac{1}{4} (s - m_e^2) - \frac{1}{4} s + \frac{1}{2} \sqrt{s(s - m_e^2)} \cos \vartheta, \quad (6)$$

og derved

$$q_{\min}^2 = -\frac{1}{4} \left( \sqrt{s} + \sqrt{s - m_e^2} \right)^2 \quad (7)$$

$$q_{\max}^2 = -\frac{1}{4} \left( \sqrt{s} - \sqrt{s - m_e^2} \right)^2. \quad (8)$$

- 6.

Vi gjentar prosedyren fra punkt 3, og finner

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_{fi}^{(a)} \mathcal{M}_{fi}^{(b)*}} &= \frac{e^4}{4 (q^2 - m_e^2) (q'^2 - m_e^2)} \times \\ &\quad \text{Tr} \{ (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\nu (\not{q} + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{q}' + m_e) \gamma_\mu \} \quad (9) \\ &\equiv \frac{e^4}{4 (q^2 - m_e^2) (q'^2 - m_e^2)} T^{(ab)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_{fi}^{(b)} \mathcal{M}_{fi}^{(a)*}} &= \frac{e^4}{4 (q'^2 - m_e^2) (q^2 - m_e^2)} \times \\ &\quad \text{Tr} \{ (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\nu (\not{q}' + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{q} + m_e) \gamma_\mu \} \quad (10) \\ &\equiv \frac{e^4}{4 (q'^2 - m_e^2) (q^2 - m_e^2)} T^{(ba)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_{fi}^{(b)} \mathcal{M}_{fi}^{(b)*}} &= \frac{e^4}{4 (q'^2 - m_e^2)^2} \times \\ &\quad \text{Tr} \{ (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\nu (\not{q}' + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\mu (\not{q}' + m_e) \gamma_\nu \} \quad (11) \\ &\equiv \frac{e^4}{4 (q'^2 - m_e^2)^2} T^{(bb)}. \end{aligned}$$

## Oppgave 2:

I denne oppgaven skulle vi studere modellen definert ved Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[ i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2} \mu_a \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m \right] \psi, \quad (12)$$

der  $F_{\mu\nu}$  er et å regne som et eksternt (dvs. ikke-dynamisk) felt.

a)

I et 4-dimensjonalt tid-rom (og naturlige enheter) har Lagrange-tettheten (masse-)dimensjon  $D\{\mathcal{L}\} = 4$ , og  $D\{\partial_\mu\} = 1$ . Da kan vi lese ut av ligning (12) at  $D\{\bar{\psi}\psi\} = 3$  (siden  $\gamma^\mu$  er

dimensjonsløs). Det bør videre være kjent at Lagrange-tettheten for det fri elektromagnetiske felt har formen  $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , slik at

$$D\{F_{\mu\nu}\} = D\{F^{\mu\nu}\} = 2$$

(siden vi opererer med en dimensjonsløs metrisk tensor). Derved finner vi

$$D\{\mu_a\} = D\{\mathcal{L}\} - D\{F_{\mu\nu}\} - D\{\bar{\psi}\psi\} = -1. \quad (13)$$

*Kommentar:*

Siden  $D\{\mu_a\} < 0$  vil ikke denne modellen vært renormaliserbar hvis det elektromagnetiske feltet  $F_{\mu\nu}$  også betraktes som dynamisk.

b) Euler-Lagrange ligningen lyder generelt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)},$$

der  $\varphi_a$  er en vilkårlig feltkomponent. I vårt tilfelle reduserer dette seg til Dirac-ligningen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \left[ i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2} \mu_a \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m \right] \psi = 0. \quad (14)$$

c) Siden  $F_{0i} = F_{i0} = 0$  har vi

$$\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \sigma^{ij} F_{ij} = \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijl} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} B^l = 2 \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \end{pmatrix}$$

Hvis vi innfører  $2 \times 2$  matrisen  $b \equiv \mu_a \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$  kan ligning (14) skrives på formen

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - b - m & i\vec{\sigma} \cdot \nabla \\ -i\vec{\sigma} \cdot \nabla & -i\partial_t - b - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix} = 0.$$

Med planbølgeløsningen

$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim e^{-i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

vil  $i\partial_t \rightarrow \omega$ ,  $i\nabla \rightarrow -\vec{p}$ , og med planbølgeløsningen

$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim e^{i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

vil  $i\partial_t \rightarrow -\omega$ ,  $i\nabla \rightarrow \vec{p}$ . Dette gir de algebraiske ligningene

$$\begin{pmatrix} \omega - m - b & -p \hat{\pi} \\ p \hat{\pi} & -\omega - m - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix} = 0, \quad (15)$$

og den tilsvarende ligningen med  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $p \rightarrow -p$ . Her har vi innført

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \equiv |\vec{p}| \hat{\pi} \equiv p \hat{\pi}.$$

Merk at  $\hat{\pi} \hat{\pi} = 1$  (dvs.  $2 \times 2$  enhetsmatrisen).

d) Vi kan begynne med å se på ligningssystemet (15) generelt. Vi kan eliminere  $w_\downarrow$  fra øverste rad ved å multiplisere med  $\hat{\pi}$ ,

$$p w_\downarrow = \hat{\pi} (\omega - m - b) w_\uparrow.$$

Vi setter dette inn i nederste rad av (15), og får etter multiplikasjon med  $p \hat{\pi}$

$$[p^2 - \hat{\pi} (\omega + m + b) \hat{\pi} (\omega - m - b)] w_\uparrow \equiv Q w_\uparrow. \quad (16)$$

Betingelsen for ikke-triviell løsning av dette systemet er at  $\det Q = 0$ . Dette gir dispersjonsrelasjonen.

Når  $\vec{B}$  og  $\vec{p}$  peker i samme retning vil  $b$  og  $\hat{\pi}$  kommutere, dvs.  $\hat{\pi} b \hat{\pi} = b \hat{\pi} \hat{\pi} = b$ . Ligning (16) kan da skrives på formen

$$[p^2 - \omega^2 + (m + b)^2] w_{\uparrow} = 0. \quad (17)$$

Det eneste som ikke er proporsjonalt med enhetmatrisen i denne ligningen er  $b$  som i standard representasjon har formen

$$b = \mu_a B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

slik at betingelsen for at determinanten skal forsvinne er at

$$\omega^2 = p^2 + (m \pm \mu_a B_0)^2, \quad (18)$$

som vi ser er invariant under  $\omega \rightarrow -\omega$  og  $p \rightarrow -p$ . Så både "positiv frekvens" og "negativ frekvens" løsningene oppfyller dispersjonsrelasjonene

$$\omega = \sqrt{p^2 + (m \pm \mu_a B_0)^2}. \quad (19)$$