NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i FY8307/3404/TFY18 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 13. oktober 2005

Dette løsningsforslaget er på 4 sider.

Oppgave 1.

En fri feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 - \frac{1}{2}M^2\varphi_1\varphi_1 - \frac{1}{2}M^2\varphi_2\varphi_1 - \Delta^2\varphi_1\varphi_2 \\ &\quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_f\right)\psi, \end{aligned} \tag{1}$$

der φ_1 og φ_2 er relle Klein-Gordon felter, $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ er den elektromagnetiske felttensoren, og ψ er et Dirac-felt.

I denne modellen er de kanonisk konjugerte impulstettheten til feltene A^0 og A^i gitt som

A.	$(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0, \dot{A}^i)$	
B.	$(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (-\dot{A}^0, \dot{A}^i)$	
C.	$(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, \dot{A}^i + \partial_i A^0)$	X
D.	$(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, -\dot{A}^i)$	
E.	$(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0 + \partial_i A^i, -\dot{A}^0 - \partial_i A^0)$	

De leddene i $\mathcal{L}$ som avhenger av $\partial_0 A^\mu$ er

$$-\frac{1}{4}\left(F^{0\mu}F_{0\mu} + F^{\mu 0}F_{\mu 0}\right) = -\frac{1}{4}\left(F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0}\right) = \frac{1}{2}F^{i0}F^{i0} = \frac{1}{2}(\dot{A}^i + \partial_i A^0)(\dot{A}^i + \partial_i A^0),$$

som gir at $\Pi_{A^0} = 0$, $\Pi_{A^i} = \dot{A}^i + \partial_i A^0$.

Oppgave 2.

Bruk Lagrangetettheten (1) til å skrive ned bevegelsesligningene for φ_1 og φ_2.

Euler-Lagrange ligningene er

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a},$$

som gir

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi_1 = -M^2\varphi_1 - \Delta^2\varphi_2, \tag{2}$$
$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi_2 = -M^2\varphi_2 - \Delta^2\varphi_2. \tag{3}$$

Ved inspeksjon ser vi at ved å addere og subtrahere disse ligningene får vi

$$\left[\,\Box + M^2 + \Delta^2\,\right](\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \qquad \left[\,\Box + M^2 - \Delta^2\,\right](\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Dette betyr at $\mathcal{L}$ beskriver to fri reelle Klein-Gordon felter, $\varphi_+ = (\varphi_1 + \varphi_2)/\sqrt{2}$ med masseledd $M^2 + \Delta^2$ og $\varphi_- = (\varphi_1 - \varphi_2)/\sqrt{2}$ med masseledd $M^2 - \Delta^2$.

Oppgave 3.

I modellen definert ved Lagrangetettheten (1) er det formelle uttrykket for vakuumforventningsverdien av energiimpulstensoren lik $\langle\,\Omega\,|\,T^{\mu\nu}\,|\Omega\rangle = \Lambda\,\eta^{\mu\nu}$, der

A.	$\Lambda = \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[2\lvert p\rvert + \sqrt{p^2+M^2-\Delta^2} + \sqrt{p^2+M^2+\Delta^2} - 4\sqrt{p^2+m_f^2}\right]$	X
B.	$\Lambda = \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[2\lvert p\rvert + 2\sqrt{p^2+M^2} + 2\sqrt{p^2+m_f^2}\right]$	
C.	$\Lambda = \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[2\lvert p\rvert + 2\sqrt{p^2+M^2} + \sqrt{p^2+\Delta^2} - 4\sqrt{p^2+m_f^2}\right]$	
D.	$\Lambda = \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\lvert p\rvert + \sqrt{p^2+M^2+\Delta^2} + \sqrt{p^2+M^2-\Delta^2} + \sqrt{p^2+m_f^2}\right]$	
E.	$\Lambda = \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\lvert p\rvert + 2\sqrt{p^2+M^2} + \sqrt{p^2+\Delta^2} - \sqrt{p^2+m_f^2}\right]$	

når vi bruker naturlige enheter.

Vi kan bestemme Λ fra den energitettheten $T^{00} = \Lambda\,\eta^{00} = \Lambda$ vi finner fra bidragene til nullpunktsenergi. Vi har et fotonfelt (bosonisk med 2 frihetgrader per $\boldsymbol{p}$) og energi-impuls relasjon $E_{\boldsymbol{p}} = |\boldsymbol{p}|$, to reelle Klein-Gordon felter (1 bosonisk frihetsgrad hver) med henholdsvis $E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2 + \Delta^2}$ og $E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2 - \Delta^2}$, og ett Diracfelt (fermionisk med 4 frihetsgrader per $\boldsymbol{p}$) med $E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_f^2}$. Hver bosonisk frihetsgrad teller med en factor $+\frac{1}{2}$, hver fermionisk frihetsgrad med en faktor $-\frac{1}{2}$.

Oppgave 4.

Basert på ren dimensjonsanalyse vil man (i naturlige) enheter anta at Λ er av størrelsesorden 500 TeV^4 (der 1 TeV = 10^{12} eV). Omregnet til SI-enheter svarer dette til en massetetthet på

A.	$\varepsilon \approx 5\cdot 10^{14}$ kg/m^3	
B.	$\varepsilon \approx 10^{25}$ kg/m^3	
C.	$\varepsilon \approx 5\cdot 10^{33}$ kg/m^3	
D.	$\varepsilon \approx 10^{30}$ kg/m^3	
E.	$\varepsilon \approx 10^{35}$ kg/m^3	X

Oppgitt: Lyshastigheten $c = 299\,792\,458$ m/s, Planck's konstant $\hbar = 1.055\cdot 10^{-34}$ kg m^2/s, positronladningen $e = 1.602\cdot 10^{-19}$ C.

Fotgjengeraktig kan vi først konvertere fra eV til J = kgm^2/s^2

$$500\ \mathrm{TeV}^4 = 5\cdot 10^{50}\ \mathrm{eV}^4 = 5\cdot 10^{50}\ (1.602\cdot 10^{-19})^4\ \mathrm{kg}^4\mathrm{m}^8/\mathrm{s}^8 = 3.293\cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg}^4\mathrm{m}^8/\mathrm{s}^8.$$

For å få et uttrykk med riktig dimensjon må vi dividere med $\hbar^3 c^5$, som har dimensjon kg^{3}m^{11}s^{-8}. Resultatet blir

$$\frac{3.293\cdot 10^{-25}}{1.055^3\cdot 2.998^5\cdot 10^{-3\times 34+5\times 8}}\ \mathrm{kg/m}^3 \approx 1.16\cdot 10^{35}\ \mathrm{kg/m}^3.$$

Oppgave 5.
Anta at fermionfeltet i (1) kan utvikles i egenmoder som

$$\psi(x) = \sum_{\boldsymbol{p},r} c_r(\boldsymbol{p}) u_r(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + d_r^\dagger(\boldsymbol{p}) u_r(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tag{4}$$

$c_r(\boldsymbol{p})$, ($d_r^\dagger(\boldsymbol{p})$) er annihilasjonsopertorer (kreasjons-operatorer) for partiklene (antipartiklene) i modellen, og la $|\Omega\rangle$ være vakuumtilstanden for denne modellen. Marker hvilke av vakuumforventningsverdiene nedenfor som er null

A.	$\langle \Omega \,|\, \psi(x)\, \psi(y) \,|\, \Omega \rangle$	X
B.	$\langle \Omega \,|\, \psi(x)\, \bar{\psi}(y) \,|\, \Omega \rangle$	
C.	$\langle \Omega \,|\, \psi(x) c_r^\dagger(\boldsymbol{p}) \,|\, \Omega \rangle$	
D.	$\langle \Omega \,|\, c_r^\dagger(\boldsymbol{p}) \psi(x) \,|\, \Omega \rangle$	X
E.	$\langle \Omega \,|\, \psi(x)^\dagger c_r^\dagger(\boldsymbol{p}) \,|\, \Omega \rangle$	X

For å få noe forskjellig fra 0 må vi ha en kreasjonsoperator av type $c^\dagger$ resp. $d^\dagger$ til høyre, og en korresponderende annihilasjonsoperator (av type c resp. d) til venstre.

Oppgave 6.
Diracligningen

$$\left[\mathrm{i}\left(\gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) - m\right] \psi(x^0, \boldsymbol{x}) = 0$$

er invariant under rominversjon (paritets-transformasjon), $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$. Dvs. at hvis $\psi(x^0, \boldsymbol{x})$ løser Diracligningen så gjør også $\psi_P(x^0, \boldsymbol{x})$ det, når

A.	$\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \psi(x^0, -\boldsymbol{x})$	
B.	$\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \gamma^0\, \psi(x^0, -\boldsymbol{x})$	X
C.	$\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\gamma^2\, \psi^*(x^0, -\boldsymbol{x})$	
D.	$\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \gamma^1\, \gamma^3\, \psi^*(x^0, -\boldsymbol{x})$	
E.	$\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \psi^*(-x^0, -\boldsymbol{x})$	

Vi trenger matrisen γ^0 for å få snudd tilbake fortegnet på leddet $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}$. Dette får man til ved bruk av $\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \gamma^0 = -\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}$.

Oppgave 7.
Beregn sporet $T \equiv \mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda\right\}$.
Ved bruk av relasjonen $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda}$, $\gamma^\lambda \gamma_\lambda = 4$ og $\mathrm{Tr}\{1\} = 4$ finner vi

$$T = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Oppgave 8.
La $\mathcal{T}$ være tidsordningsoperatoren og $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ et kvantisert Diracfelt. Da gjelder (i naturlige enheter, dvs. når $\hbar = c = 1$)

A.	$\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\}$	
B.	$\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} + \mathrm{i}S_F(x-y)$	
C.	$\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$	
D.	$\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = -\mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\}$	X
E.	$\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = -\mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$	

der $S_F(x-y)$ er Feynmans propagator for Dirac-partikler.
Diracfelter antikommuterer innenfor tidsordningssymbolet (det defineres slik).

Oppgave 9.
Feynmans propagator for et reellt Klein-Gordon felt $\varphi(x)$ er definert ved ligningen

$$\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\varphi(x)\varphi(y)\right\}|\Omega\rangle.$$

For et fritt felt med masse M kan denne propagatoren representeres ved Fourier-integralet (i naturlige enheter)

A. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}\,\eta^{\mu\nu}}{p^2-M^2+\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐

B. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{p^2-M^2+\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ $\boxed{\text{X}}$

C. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}}{p^2-M^2-\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐

D. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\,(\not{p}+M)}{p^2-M^2-\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐

E. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\eta^{\mu\nu}}{p^2-\mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐

Vi har et skalarfelt, derfor ingen firervektor eller Dirac indekser. Det burde utelukke alternativene A, D og E. Så må man bare *huske* at det er alternativ B og ikke C.

Oppgave 10.
La $\varphi_1(x)$ være feltet definert i Lagrangetettheten (1).
Finn uttrykket for $\langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\varphi_1(x)\varphi_1(y)\right\}|\Omega\rangle$ i denne modellen.
I analysen av oppgave 2 fant vi at $\varphi_1(x) = (\varphi_+(x)+\varphi_-(x))/\sqrt{2}$ der φ_+ og φ_- er to uavhengige Klein Gordon felt (riktig normert). Det følger at

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\varphi_1(x)\varphi_1(y)\right\}|\Omega\rangle &= \frac{1}{2}\langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\varphi_+(x)\varphi_+(y)\right\}|\Omega\rangle + \frac{1}{2}\langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\varphi_-(x)\varphi_-(y)\right\}|\Omega\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{\mathrm{i}}{p^2-M^2-\Delta^2+\mathrm{i}\epsilon} + \frac{\mathrm{i}}{p^2-M^2+\Delta^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}.\end{aligned}$$