NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i FY3464 KVANTEFELTTEORI

Torsdag 26. mai 2005

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Dette løsningsforslaget er på 5 sider.

Oppgave 1. Perturbativ korreksjon til vakuumenergi i QED

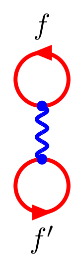
I denne oppgaven skal du skissere hvordan vakuumenergien i QED til orden e^2 kan relaterers til vakuumpolarisasjonen

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu\right)\Pi(q^2)$$

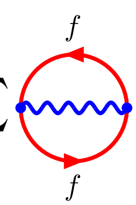
a) Tegn for hvert ladet fermion f de diagrammene av orden e^2 som bidrar til vakuumenergien i QED.

Vi har at

$$-\mathrm{i}TE_0^{(2)} = \sum_{ff'}$$



$$+\sum_f$$

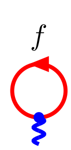


Ved evaluering av diagrammene finner vi en fri integrasjon, $\int \mathrm{d}^d x = TV$. Ved ikke å utføre denne gir diagrammene oss et uttrykk for energi pr. volumenhet, dvs. energitetthet. Det var ikke forventet at kandidatene skulle huske faktoren $-\mathrm{i}$ (eller bruke tid på å utlede denne).

b) Argumenter for at det for hvert ladet fermion f bare er *ett* diagram som er forskjellig fra null.

Det første diagrammet svarer til den klassiske Coulombenergien tilknyttet ladningstettheten ρ_{vac} i vakuum. Men observasjonelt er det opplagt at vi har $\rho_{\text{vac}} = 0$, så dette bidraget må være null. I dimensjonell regularisering kan dette regnes ut som følger:

$$\sum_f$$



$$\sim \sum_f \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\,\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{k} + m_f)\right]}{k^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\varepsilon} = \sum_f \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\,\frac{4k^\mu}{k^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\varepsilon} = 0, \qquad (1)$$

der siste likhet er en konsekvens av at integranden er antisymmetrisk i k. Ved andre regulariseringsmetoder er dette mer subtilt, fordi vi opererer med integraler som potensielt er divergente. I operatorformulering av teorien vil hvert fermion gi null bidrag til vakuumladningen ρ_{vac} hvis man etter Schwinger definerer strømoperatorene på en måte som er antisymmetrisk under partikkel-antipartikkel konjugasjon, nemlig

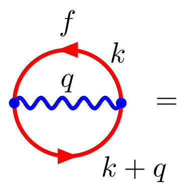
$$j_f^\mu(x) = \frac{1}{2} q_f e \left[\bar{\psi}_\alpha^{(f)}(x), \gamma^\mu_{\alpha\beta} \psi_\beta^{(f)}(x) \right].$$

Tilslutt er det jo slik at $\sum_f q_f = 0$ i Standardmodellen, slik at den totale vakuumladningen blir null selv om vi ikke er nøye med operatorordningen (men ordner bidragene fra alle fermioner på samme måte).

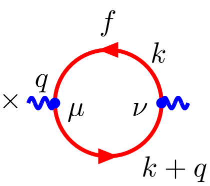
Det var ikke forventet at kandidatene skulle kunne alle disse argumentene for at ρ_{vac} er null.

c) Vis at hvert slikt diagram kan relateres til et integral over et tilsvarende bidrag til vakuumpolarisasjonen, $\Pi_{\mu\nu}^{(f)}(q)$. Du trenger ikke å gjøre noen integrasjoner eksplisitt. Du kan anta at alle integraler er endelige og at integrasjonsrekkefølgen ikke spiller noen rolle, slik det f.eks. er ved dimensjonell regularisering.

Vi observerer at



$$= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \frac{-\mathrm{i}\left(\eta^{\mu\nu} - \xi q^\mu q^\nu / q^2\right)}{q^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \times \tag{2}$$



Her er faktoren $\frac{1}{2}$ en symmetrifaktor for diagrammet til venstre, som ikke gjenfinnes for diagrammet til høyre. Vi har uttrykt fotonpropagatoren i en generell Fermi-gauge, karakterisert ved parameteren ξ. Diagrammet til høyre kan identifiseres som annen ordens bidrag til vakuumpolarisasjon fra fermion f, i $\Pi_{\mu\nu}^{(f)}(q) = \mathrm{i}\left(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu\right) \Pi^{(f)}(q^2)$. Vi finner derfor det gauge invariante uttrykket

$$\frac{-\mathrm{i} E_0^{(2)}}{V} = \frac{3}{2} \sum_f \int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \Pi^{(f)}(q^2). \tag{3}$$

Kommentar: Det var ikke forventet at noen skulle regne lenger enn dette (eller få alle −tegn og i'er på plass), men det er interessant å fullføre regningen. Fra *Peskin & Schroeder* finner vi at

$$\Pi^{(f)}(q^2) = -\frac{8 q_f^2 e_0^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \int_0^1 \mathrm{d}t\, t(1-t) \left[m_f^2 - t(1-t) q^2\right]^{-2+d/2}, \tag{4}$$

der e_0 er den urenormerte ladningen. Innsatt i (3), og etter rotasjon til imaginær q^0, $q^0 \to \mathrm{i} q_E^0$, gir dette

$$\begin{aligned}
\frac{E_0^{(2)}}{V} &= \frac{12 e_0^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - \tfrac{d}{2}) \sum_f q_f^2 \int_0^1 \mathrm{d}t\, t(1-t) \int \frac{\mathrm{d}^d q_E}{(2\pi)^d} \left[m_f^2 + t(1-t) q_E^2\right]^{-2+d/2} \\
&= \frac{12 e_0^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - \tfrac{d}{2}) \sum_f q_f^2 \int_0^1 \mathrm{d}t\, \left[t(1-t)\right]^{1-d/2} \int \frac{\mathrm{d}^d x}{(2\pi)^d} \left[m_f^2 + x^2\right]^{-2+d/2} \\
&= \frac{12 e_0^2}{(4\pi)^d} \Gamma(2 - d) \int_0^1 \mathrm{d}t\, \left[t(1-t)\right]^{1-d/2} \sum_f q_f^2 m_f^{2d-4} \\
&= \frac{12 e_0^2}{(4\pi)^d} \frac{1}{(3-d)(2-d)} \Gamma(2 - \tfrac{d}{2})^2 \sum_f q_f^2 m_f^{2d-4}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Dette uttrykket kan bearbeides videre ved å innføre den renormerte ladningen, men vi avstår fra dette her. Det er også mulig å relatere høyere ordens bidrag til vakuumenergi til tilsvarende ordens bidrag til vakuumpolarisasjon.

Oppgave 2. Masseavhengighet til anomalt magnetisk moment

Laveste ordens korreksjon til det anomale magnetiske momentet til leptonene (e, μ, τ) er gitt ved Schwinger-korreksjonen

$$a_\ell \equiv \frac{g_\ell - 2}{2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right). \tag{6}$$

Det kan argumenteres for at man i denne formelen bør bruke den løpende koblingskonstanten

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Pi_f(q^2)}, \tag{7}$$

der q^2 er av størrelsesorden $-m_\ell^2$, dvs. typisk størrelsesorden på den (euklidske) firerimpulsen som flyter gjennom foton-propagatoren når man evaluerer Feynmandiagrammet for a_ℓ.
Oppgitt: $m_e = 511\ \mathrm{keV/c^2}$, $m_\mu = 106.\ \mathrm{MeV/c^2}$, $m_\tau = 1.78\ \mathrm{GeV/c^2}$.
Laveste ordens bidrag til Π_f fra et lepton ℓ er gitt som

$$\Pi_f^{(\ell)}(q^2) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)\int_0^1 \mathrm{d}t\, t(1-t)\,\log\left[1 - t(1-t)\frac{q^2}{m_\ell^2}\right] \approx \begin{cases} \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)\left[\frac{1}{6}\log\frac{-q^2}{m_\ell^2} - \frac{5}{18}\right], & \frac{-q^2}{m_\ell^2} \gg 1, \\ \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)\frac{1}{30}\frac{-q^2}{m_\ell^2}, & \left|\frac{-q^2}{m_\ell^2}\right| \ll 1, \end{cases}$$

a) Bruk dette argumentet til å anslå differansene $a_\mu - a_e$ og $a_\tau - a_e$.

Ved rekkeutvikling til annen orden i $\alpha(0)$ finner vi

$$\begin{aligned} a_e &= \frac{\alpha(0)}{2\pi}\left[1 + \Pi_f^{(e)}(-m_e^2) + \Pi_f^{(\mu)}(-m_e^2) + \Pi_f^{(\tau)}(-m_e^2) + \Pi_f^{(\mathrm{had})}(-m_e^2)\right], \\ a_\mu &= \frac{\alpha(0)}{2\pi}\left[1 + \Pi_f^{(e)}(-m_\mu^2) + \Pi_f^{(\mu)}(-m_\mu^2) + \Pi_f^{(\tau)}(-m_\mu^2) + \Pi_f^{(\mathrm{had})}(-m_\mu^2)\right], \\ a_\tau &= \frac{\alpha(0)}{2\pi}\left[1 + \Pi_f^{(e)}(-m_\tau^2) + \Pi_f^{(\mu)}(-m_\tau^2) + \Pi_f^{(\tau)}(-m_\tau^2) + \Pi_f^{(\mathrm{had})}(-m_\tau^2)\right], \end{aligned}$$

der $\Pi_f^{(\mathrm{had})}$ ikke kan beregnes perturbativt. Vi merker oss at $\Pi_f^{(\ell)}$ bare avhenger av dimensjonsløse masseforhold, slik at f. eks. $\Pi_f^{(e)}(-m_e^2) = \Pi_f^{(\mu)}(-m_\mu^2) = \Pi_f^{(\tau)}(-m_\tau^2)$. Vi finner derfor

$$\begin{aligned} a_\mu - a_e &= \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left[I(m_\mu^2/m_e^2) + I(m_\mu^2/m_\tau^2) - I(m_e^2/m_\mu^2) - I(m_e^2/m_\tau^2) + H(m_\mu^2) - H(m_e^2)\right], \\ a_\tau - a_e &= \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left[I(m_\tau^2/m_e^2) + I(m_\tau^2/m_\mu^2) - I(m_e^2/m_\mu^2) - I(m_e^2/m_\tau^2) + H(m_\tau^2) - H(m_e^2)\right], \end{aligned}$$

der $I(x)$ er integralet

$$I(x) = \int_0^1 \mathrm{d}t\, t(1-t)\,\log\left[1 + t(1-t)x\right] \approx \begin{cases} \frac{1}{6}\log x - \frac{5}{18}, & x \gg 1, \\ \frac{1}{30}x, & |x| \ll 1, \end{cases}$$

og $H(m^2) \equiv \frac{\pi}{2\alpha}\Pi_f^{(\mathrm{had})}(-m^2)$ er det hadroniske bidraget som vi ikke kan regne ut, og derfor skal utelate. Ved å neglisjere alle ledd der x er liten kommer vi fram til prediksjonene

$$a_\mu - a_e \approx \frac{\alpha^2}{6\pi^2}\left[\log\frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{5}{3}\right] \approx 8.1 \times 10^{-6}, \tag{8}$$

$$a_\tau - a_e \approx \frac{\alpha^2}{6\pi^2}\left[\log\frac{m_\tau^2}{m_e^2} + \log\frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{10}{3}\right] \approx 1.67 \times 10^{-5}. \tag{9}$$

Oppgave 3.

I denne oppgaven skal du se på (Higgs) modellen definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*\,(D^\mu\varphi) + m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}\lambda\,(\varphi^*\varphi)^2 + \mathrm{i}L^\dagger\sigma^\mu D_\mu L - g\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\varphi^* L_\alpha L_\beta - \varphi L^*_\alpha L^*_\beta\right).$$

Her er $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, $D_\mu\varphi = (\partial_\mu + 2\mathrm{i}eA_\mu)\,\varphi$, $D_\mu L = (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\,L$, L er en to-komponent (Weyl) spinor, $\sigma^\mu = (I, -\boldsymbol{\sigma})$ der $\boldsymbol{\sigma}$ er Paulimatrisene, og $\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Både m^2, λ og g antas å være reelle og positive. I denne modellen kan Higgs mekanismen antas å opptre.

a) Vis at $\mathcal{L}$ er gauge invariant. Dette innebærer at du også må angi transformasjonsreglene for alle feltene φ, L og A_μ.

Vi velger transformasjonsregelen for $A_\mu(x)$ til

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu f(x), \tag{10}$$

som holder $F_{\mu\nu}$ invariant, $\partial_\nu A'_\mu - \partial_\mu A'_\nu = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. Vi krever videre at $D_\mu\varphi$ skal transformere på samme måte som φ, og at $D_\mu L$ skal transformere på samme måte som L. Dette bestemmer transformasjonslovene for φ og L til

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}ef(x)}\varphi(x), \tag{11}$$
$$L(x) \to L'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ef(x)}L(x). \tag{12}$$

Ved inspeksjon ser man da at Lagrangetettheten $\mathcal{L}$ er gauge invariant. Det mest interessante er leddet

$$\varphi^* L_\alpha L_\beta \to \varphi'^* L'_\alpha L'_\beta = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ef(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ef(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ef(x)}\varphi^* L_\alpha L_\beta = \varphi^* L_\alpha L_\beta,$$

og dets kompleks konjugerte.

b) Hva blir vakuumforventningsverdien til Higgsfeltet i denne modellen (før perturbative korreksjoner)?

Vi vil minimaliserte potensialet $V(x) = -m^2\,x + \frac{1}{4}\lambda x^2$, der $x = |\varphi|^2$. Vi ser at minimum inntrer for

$$|\varphi|_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,m \tag{13}$$

c) Hva blir massen til vektorbosonet A_μ (før perturbative korreksjoner)?

Masseleddet til A_μ kommer fra det "kinetiske" bidraget til φ-feltet,

$$(D_\mu\varphi)^*\,(D^\mu\varphi) \to 4e^2|\varphi|_0^2 A_\mu A^\mu \equiv \frac{1}{2}M_A^2 A_\mu A^\mu.$$

Altså finner vi at

$$M_A = \sqrt{8}\,e|\varphi|_0 = 4\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\,em \tag{14}$$

d) Hva blir massen til den gjenværende Higgs partikkelen (før perturbative korreksjoner)?

Vi ser bare på dynamikken til $|\varphi|$ (fasen blir "spist opp" av Higgs mekanismen), og skriver $|\varphi| = |\varphi|_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho$ og finner

$$\begin{aligned} m^2|\varphi|^2 &= m^2\left(|\varphi|_0^2 + \sqrt{2}|\varphi|_0\,\rho + \frac{1}{2}\rho^2\right) \\ -\frac{1}{4}\lambda\,|\varphi|^4 &= -\frac{1}{4}\lambda\left(|\varphi|_0^2 + \sqrt{2}|\varphi|_0\,\rho + \frac{1}{2}\rho^2\right)^2. \end{aligned}$$

Vi trenger bare regne ut ρ^2-leddene i detalj, men det er ganske lett å finne det fullstendige uttrykket

$$V = -\frac{1}{\lambda}m^4 + m^2\rho^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}m\rho^3 + \frac{1}{16}\lambda\rho^4.$$

Her skal masseleddet ha formen $\frac{1}{2}M_\rho^2\rho^2$, så vi finner

$$M_\rho = \sqrt{2}\,m. \tag{15}$$

e) Hva blir massen til fermionet L (før perturbative korreksjoner)?

Et (Majorana) masseledd vil ha formen $\frac{1}{2}M_L\varepsilon^{\alpha\beta}\left(L_\alpha L_\beta - L_\alpha^* L_\beta^*\right)$, så vi identifiserer $\frac{1}{2}M_L = g|\varphi|_0$, dvs.

$$M_L = 2g|\varphi|_0 = 2\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,gm. \tag{16}$$