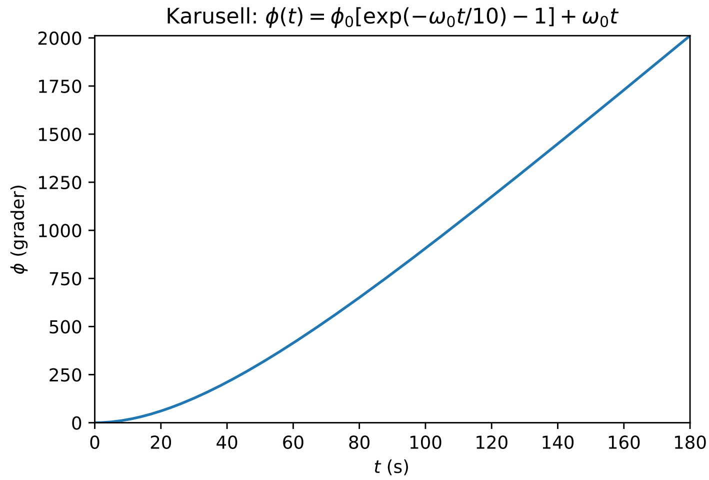
Løsningsforslag til eksamen FY6013 Mekanikk 1. desember 2021.

1.
a.



$$\phi(180) = 10 \cdot \left(e^{-10\cdot 180/10} - 1\right) + 10 \cdot 180 = 35.1 \text{ rad} = 2012^\circ = 5.6 \text{ runder.}$$

b. Karusellens vinkelhastighet øker monotont fra null til sin maksimale og konstante verdi $\omega_0 = 0.25$ rad/s. Dette ser vi fra grafen for $\phi(t)$, og av at $\phi(t) \simeq \omega_0 t$ når det har gått "lang tid".
Eller vi kan regne ut $\omega = d\phi/dt$:

$$\omega(t) = \omega_0(1 - \frac{\phi_0}{10} e^{-\omega_0 t/10}).$$

c. Netto dreiemoment på karusellen, $\tau = FR - fr$, med $R = 4.0$ m, $r = 2.5$ m og $f = 5.0$ kN gir karusellen en vinkelakselerasjon $\ddot{\phi}$ bestemt av Newtons 2. lov for rotasjon, $\tau = I_0\ddot{\phi}$. Vi deriverer $\phi(t)$ to ganger:

$$\ddot{\phi}(t) = \phi_0 \cdot (-\omega_0/10)^2 \cdot \exp(-\omega_0 t/10).$$

I starten, ved $t = 0$ er

$$\ddot{\phi}(0) = \phi_0 \cdot \omega_0^2/100 = 10 \cdot 0.25^2/100 = 0.00625,$$

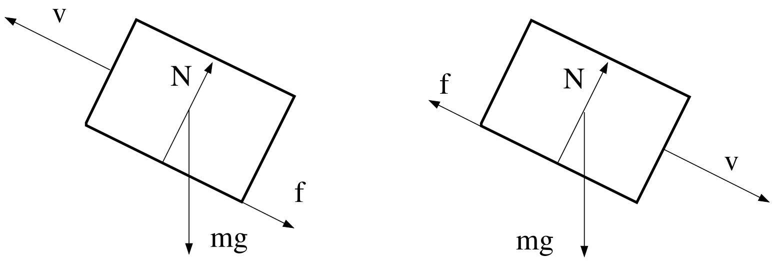
med enhet rad/s^2. Dermed:

$$F = (1/R)(fr + \ddot{\phi}(0)Md^2/8) = (1/4)(5000 \cdot 2.5 + 0.00625 \cdot 3000 \cdot 100/8) = 3184 \text{ N} \simeq 3.2 \text{ kN.}$$

Vi ser at vinkelakselerasjonen er så liten, også helt i starten, at vi ville ha fått praktisk talt samme svar ved å sette $\tau \simeq 0$ og $F \simeq fr/R = 3.1$ kN.

2.

a.



b. Her kan vi bruke Newtons 2. lov, eller energibevarelse, dersom vi inkluderer friksjonsarbeidet $W_f = fL = \mu NL = \mu mgL\cos\beta$ når klossen glir en lengde L oppover skråplanet. Klossen taper kinetisk energi $\Delta K = mv_0^2/2$ og vinner potensiell energi $\Delta U = mgL\sin\beta$, slik at

$$mgL(\sin\beta + \mu\cos\beta) = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

dvs

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = 0.32 \text{ m}.$$

På vei ned virker f oppover, slik at energibevarelse uttrykkes som

$$mgL(\sin\beta - \mu\cos\beta) = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Dette gir

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\sin\beta - \mu\cos\beta)} = 0.55 \text{ m}.$$

c.

d. For ren rulling av kompakt kule er total kinetisk energi $7mv_0^2/10$. Siden kontaktpunktet ikke glir mot underlaget, utføres det ikke noe friksjonsarbeid. Energibevarelse gir dermed

$$mgL\sin\beta = \frac{7}{10}mv_0^2,$$

dvs $L = 0.57$ m. Som også blir rullelengde ned igjen, siden friksjonsarbeidet er null.

3.

a. Impuls før kollisjonen: mv_0. Etter: $3mv$. Dette gir felles slutthastighet $v = v_0/3$. Kinetisk energi før: $K_0 = mv_0^2/2$. Etter: $K_1 = (1/2)(3m)(v_0/3)^2 = mv_0^2/6$. Det betyr at 2/3 av energien gikk tapt i kollisjonen.

b. Impulsbevarelse: $mv_0 = mv_1 + 2mv_2$. Energibevarelse: $mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2$.
Multipliser siste ligning med $2m$ og samle ledd med v_0 og v_1 på venstre side og ledd med v_2 på høyre side. Med 3. kvadratsetning og divisjon av energiligningen med impulsligningen har vi da at $v_0 + v_1 = v_2$, mens impulsligningen er $v_0 - v_1 = 2v_2$. Disse lineære ligningene løses enkelt og gir $v_1 = -v_0/3$ og $v_2 = 2v_0/3$.

---

4. La oss kalle oksygenmassen for $m = 16u$, slik at svovelmassen er $2m$ og hele molekylets masse er $5m$.

a.

$$I_z = 3md^2 = 48ud^2$$

b.

$$I_y = 2m(d\cos 30°)^2 = 32u \cdot (\sqrt{3}d/2)^2 = 24ud^2$$

c.

$$I_x = md^2 + 2m(d\sin 30°)^2 = md^2 + md^2/2 = 24ud^2$$

d.

$$I_{zO} = I_z + 5md^2 = 128ud^2$$

---

5. Hele kula med masse $2M$ har treghetsmoment $4MR^2/5$ mhp sitt massesenter, definert som origo i oppgaveteksten. Halvkula med masse M bidrar med halvparten av dette, dvs $2MR^2/5$. Aksen gjennom halvkulas CM er parallellforskjøvet $d = 3R/8$ fra origo. Steiners sats gir dermed

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2 - M \cdot (3R/8)^2 = (2/5 - 9/64)MR^2 = (128 - 45)MR^2/320 = \frac{83}{320}MR^2,$$

som betyr at $n = 83$.

---

6. Vi bruker rotasjonslikevekt omkring balansepunktet, som vi f eks kan kalle B. Stangas massesenter ligger 7.5 cm til høyre for B. Null netto dreiemoment om B gir da $m \cdot 10$ cm $= 0.80 \cdot 7.5$ kg cm, dvs $m = 0.60$ kg.
Translasjonslikevekt for systemet (m og M samlet) betyr at normalkraften på stanga i B tilsvarer den totale tyngden av lodd og stang, dvs $N = (m + M)g = 1.40 \cdot 9.81$ N $= 14$ N.

7.

a. Vi vil vel gjerne bruke så liten kraft som mulig for å oppnå et så stort dreiemoment på svingdøra som mulig, slik at vinkelakselerasjonen blir så stor som mulig, slik at du kommer deg gjennom så fort som mulig.

b. Med dreiemoment $\tau = Fb$ og treghetsmoment $I_0 = 4 \cdot Mb^2/3$ gir Newtons 2. lov for rotasjon en vinkelakselerasjon

$$\alpha = \tau/I_0 = \frac{3F}{4Mb}.$$

c. Med konstant vinkelakselerasjon er $\theta(t) = \alpha t^2/2$. Her:

$$\theta(t) = \frac{3F}{8Mb}\, t^2,$$

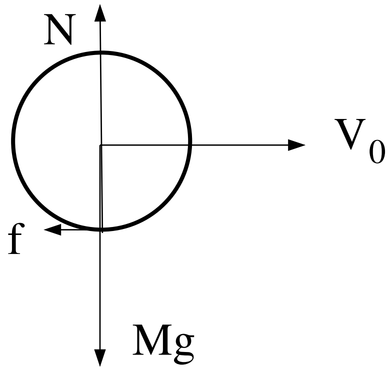
dvs

$$t = \sqrt{\frac{8Mb\theta}{3F}} = 2.4 \text{ s}$$

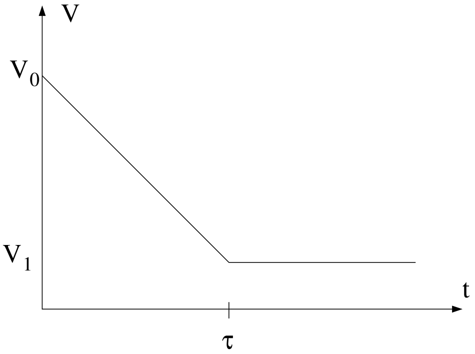
med $\theta = \pi/2$.

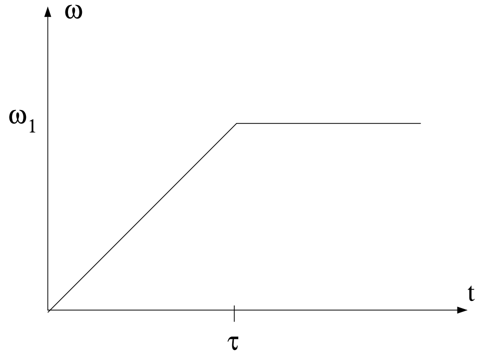
8.

a.



b.





Ren rulling etter $t = \tau$ betyr at $\omega_1 = V_1/R$ (rullebetingelsen).

9.

$$p = p_0 + \rho g h = (101300 + 42526)\,\text{Pa} = 1.42\,\text{atm}$$

---

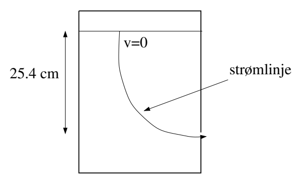
10. $p = F/A$ er like stort på de to sylinderne (Pascals prinsipp). Siden arealet A er proporsjonalt med d^2, har vi $d_1 = d_2\sqrt{F_1/F_2} = 30\sqrt{500/4000 \cdot 9.81}$ mm $= 3.4$ mm.

---

11. Vannets massetetthet er $\rho_0 = 1000$ kg/m^3. Klossens massetetthet er $\rho = M/V$. Oppdriften er $F = 0.75\rho_0 V g$, som er tyngden av fortrengt vann. Klossen er i likevekt og Newtons 1. lov gir da $F = Mg$. Dermed:

$$\rho = M/V = F/gV = 0.75\rho_0 = 750\,\text{kg/m}^3.$$

12.



Vanndybden er $H = V/A = V/\pi r^2 = 0.025/\pi \cdot (0.15)^2 = 0.3537$ m. Det betyr at hullet er $d = 0.2537$ m under overflaten. Bernoullis lov langs en strømlinje fra overflaten og til like utenfor hullet (der trykket er lik det omgivende atmosfæretrykket p_0) gir

$$p_0 + \rho g d = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Her har vi antatt at vannets hastighet er praktisk talt lik null på overflaten (venstre side av ligningen). Dette gir

$$v = \sqrt{2gd} = 2.23\,\text{m/s}.$$

13.
Et rør med radius r og lengde L representerer en strømningsmotstand $R = 8\eta L/\pi r^4$ for en væske med viskositet η. En trykkforskjell Δp mellom rørets to ender gir da en volumstrøm $Q = \Delta p/R$, dvs $\Delta p = RQ$. Med oppgitte tallverdier blir $\Delta p = 3886$ Pa $\simeq 3.9$ kPa. Kommentar: Dette er mindre enn 1% trykkreduksjon (5 bar = 500 kPa).
