NTNU – Trondheim
Norwegian University of
Science and Technology

Løysingsframlegg i FY6015 Astronomi
Vår 2016

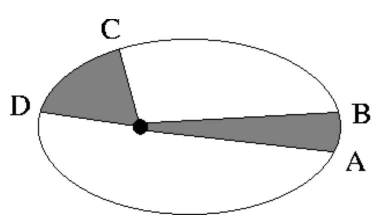
Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Onsdag 15. juni 2016
kl. 09.00-14.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter: navn og symboler

Oppgåve 1 - klassisk mekanikk

a) **Keplers andre lov:** Baneradien sveipar over like store flater/areal i like store tidsrom



$$\frac{dA}{dt} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{L}{m}}}\,, \tag{1}$$

der L er dreieimpulsen og m er massen til planeten.
Keplers tredje lov: Forholdet mellom kvadratet av omløpstida T og store halvaksen a i tredje potens er det same for alle planetar:

$$T^2 = \underline{\underline{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}}\,. \tag{2}$$

der G er Newtons gravitasjonskonstant og M er massen til sola.

b) Hastigheitsvektoren er alltid tangent til banen, dvs ellipsen. Akselerasjonsvektoren peiker alltid frå punktet i banen (X) mot brennpunktet F_1 der sola er. (Dette gjeld for ei sentralkraft).

c) Ja, i punkta A og B på figuren (side 2 oppgåveteksten) peikar $\vec{v}$ langs y-aksen og akselerasjonen langs x-aksen.

d) Newtons andre lov kombinert med Newtons gravitasjonslov gjev

$$|\vec{a}| = \frac{GM}{r}\,, \tag{3}$$

der r er avstanden mellom planeten og sola. Avstanden r er minst i A og størst i B. Dette impliserer at absoluttverdien til akselerasjonen $|\vec{a}|$ er størst i punktet A og minst i punktet B.

e) Den totale energien for ein planet i bane rundt sola er gjeven ved summen av kinetisk og potensiell energi:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}\,. \tag{4}$$

Jo mindre r er, desto større må v vere for venstresida skal vere konstant. Dette er punktet A.

Oppgåve 2 -spesiell relativitetsteori

a)

1. Alle inertialsystem (referansesystem der Newtons lover gjeld) er likeverdige. Naturens lover er dei same i alle inertialsystem

2. Lyshastigheiten c i vakuum er den same i alle inertialsystem

b) Omlapustida T_{lab} er gjeven ved buelengda $s = 2\pi R$ til sirkelen delt på banefarta v, ,altså

$$T_{\text{lab}} = \underline{\underline{\frac{2\pi R}{v}}} . \tag{5}$$

Observatøren som følgjer med partikkelen har hastigheit v i forhold til observatøren i labsystemet. Vi må altså bruke formelen for tidsdilatasjon og får

$$T_{\text{eiga}} = \underline{\underline{T_{\text{lab}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} . \tag{6}$$

Merknad: Vi noterer oss at observatøren som følgjer partikkelen *ikkje* er i eit inertialsystem, men i eit akselerert referansesystem der akselerasjonen er den vanlege akselerasjonen $a = \frac{v^2}{R}$ for ein partikkel som bevegar seg i sirkel med konstant banefart. Formelen for tidsdilatasjon gjeld framleis, men dette er utafor pensum.

c) Når bordplata er i ro er arealet

$$A = \underline{\underline{L^2}} . \tag{7}$$

Når bordplata bevegar seg krympar den i bevegelesesretninga - Dette er vanlegv lengdekontraksjon. I retninga normalt på bevegelesesretninga er det ingen lengdekontraksjon. Arealet blir difor

$$A' = L\,L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ved innsetting av v, får vi

$$A' = \underline{\underline{\frac{1}{2}L^2}} . \tag{8}$$

Bordplata har krympa til halvparten av kvilelengda i lengderetninga og ser såleis ut som eit rektangel med eine sida dobbelt så lang som den andre.

d) S er eit inertialsystem i ro på VGS og S' er eit inertialsystem som følgjer med Jens. Det tyder at $v = \frac{3}{4}c$ og $v'_x = \frac{3}{4}c$. Formelen for addisjon av hastigheit gjev då

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v + v'_x}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}} \\ &= \underline{\underline{\frac{24}{25}c}} . \end{aligned} \tag{9}$$

Galileitransformasjonen gjev $v_x = v + v'_x$ og difor

$$v_x = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}c\,, \tag{10}$$

altså overlyshastigheit. Formelen $v_x = v + v'_x$ er utleia med premisset at $t = t'$, altså at tid er absolutt. Dette veit vi er feil.

Oppgåve 3 - blanda drops

a) Vi bruker formelen for Dopplereffekt og kan skrive

$$f_1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}f_0\,. \tag{11}$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}f_0\,. \tag{12}$$

Vi har målt f_1 og f_2 og kan dele (12) på (11) for å eliminere f_0 Dette gjev

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{c-v}{c+v}\,. \tag{13}$$

Denne likninga kan vi løyse med omsyn på v og vi finn

$$v = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}c \tag{14}$$

Samanhengen mellom frekvens og bølgjelengde er $f\lambda = c$. Innseting og opprydding gjev

$$v = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\,.$$

Dette gjev

$$\begin{aligned} v &= \frac{600-500}{600+500}c \\ &= \frac{c}{11} \\ &= \underline{\underline{2.7 \times 10^7 m/s}}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Vi kan finne f_0 frå likning (11) (eller (12)). Dette gjev

$$\begin{aligned} f_0 &= \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}f_1 \\ &= \sqrt{\frac{c-\frac{c}{11}}{c+\frac{c}{11}}}f_1 \\ &= \sqrt{\frac{5}{6}}f_1 \end{aligned} \tag{16}$$

Og tilslutt

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{c}{f_0} \\
&= \sqrt{\frac{6}{5}}\frac{c}{f_1} \\
&= \sqrt{\frac{6}{5}}\lambda_1 \\
&= \underline{\underline{548nm}}\ . \qquad (17)
\end{aligned}
$$

b) Eit svart hol med masse M av Schwarzchild-type er kulesymmetrisk. Massen er innanfor Schwarzchildradien $R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}$. I tillegg

1. Utanfor R_S er gravitasjonsfeltet det same som gravitasjonsfeltet utanfor ei stjerne eller ein planet.

2. Det er ein fysisk singularitet i $r = 0$ med uendeleg krumning.

3. Viss du kjem innanfor Schwarzchildradien R_S kan du aldri kome ut igjen, men vil bli "sugd" in mot singulariteten og knust.

4. Schwarzchildradien R_S fungerer som ein horisont. Ein observatør som utanfor kan ikkje motta lyssignal frå ein observatør som er innanfor.

5. Ein observatør som passerer horisonten vil ikkje merke noko spesielt.

c) Den spektrale energitettheiten for stråling frå eit svart legeme som funksjon av bølgjelengda λhar ein topp som er omvendt proporsjonal med temperaturen til legemet. Viss vi kallar denne bølgjelengda λ_m, har vi relasjonen

$$\lambda_m T = 2897,77\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}\ . \qquad (18)$$

Viss vi måler den spektrale energitettheiten til t.d. ei stjerne, kan vi finne overflatetemperaturen. For sola gjev dette ein temperatur på omlag 5800K.

d) Ein metrikk er eit avstandsmål i eit matematisk rom som gjev avstanden mellom punkt i dette rommet. Det er uavhengig av koordinatsystemet ein vel for å beskrive dette rommet. Døme er

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2\ , &&\text{(Eulidsk plan)}\ , \qquad (19)\\
ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2\ , &&\text{(Minkowskirommet)}\ . \qquad (20)
\end{aligned}
$$