NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for fysikk

Løsningsforslag - Eksamensoppgave
FY6016 Mekaniske bølger og eksperimentelt arbeid

Faglig kontakt under eksamen: Astrid Johansen
Tlf.: 918 22 404

Eksamensdato: 11.12.2019
Eksamenstid (fra-til): kl.09.00 – 13.00
Tillatte hjelpemidler: Alle, men besvarelsen skal være et individuelt arbeid. Nødvendige konstanter og andre faktastørrelser som ikke er oppgitt må kandidaten selv finne fram til.

Annen informasjon: Vurderingskriterier: se s.2
Målform/språk: Bokmål

Antall sider: **4**

Annen informasjon:
Du må samle alle svararkene dine i én fil og laste opp denne. Dersom besvarelsen din består av både word-dokument(er) og håndskreven besvarelse, skriv ut word-dokumentet og skann det sammen med den håndskrevne besvarelsen til én pdf-fil. Dersom du får problemer med dette, kan alle dokumentene sendes på epost til videre@ntnu.no.

Kontrollert av:

Dato Sign

Vurderingskriterier

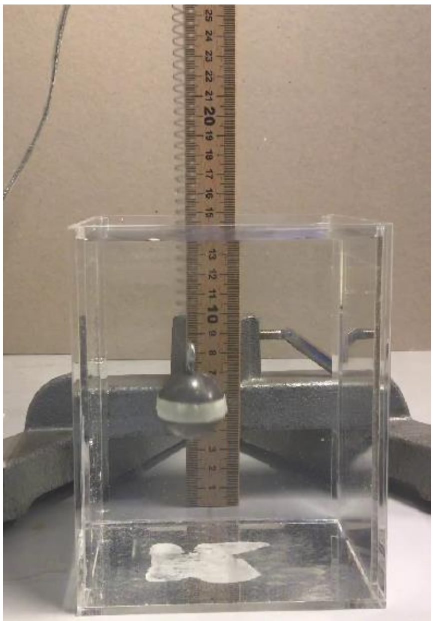
Ved vurderingen vektlegges din evne til å vise **egen** kompetanse ved å

- vise kunnskap om fysiske fenomener og sammenhenger
- begrunne og formidle resonnementer
- gjøre kvalitative vurderinger
- gjøre kvantitative beregninger
- presentere besvarelsen

Prosentene på hver oppgave indikerer hvor mye den teller i det endelige resultatet for hele denne eksamensoppgaven.

Oppgave 1 (Vekt: 40%)

I et forsøk på lab'en lot vi et lodd svinge vertikalt i et kar med vann. Bildet ved siden av viser deler av oppsettet. Loddet var festet i en metallfjær som igjen var festet i en kraftsensor (utenfor bildet). Kraftsensoren registrerte dermed draget i fjæra.

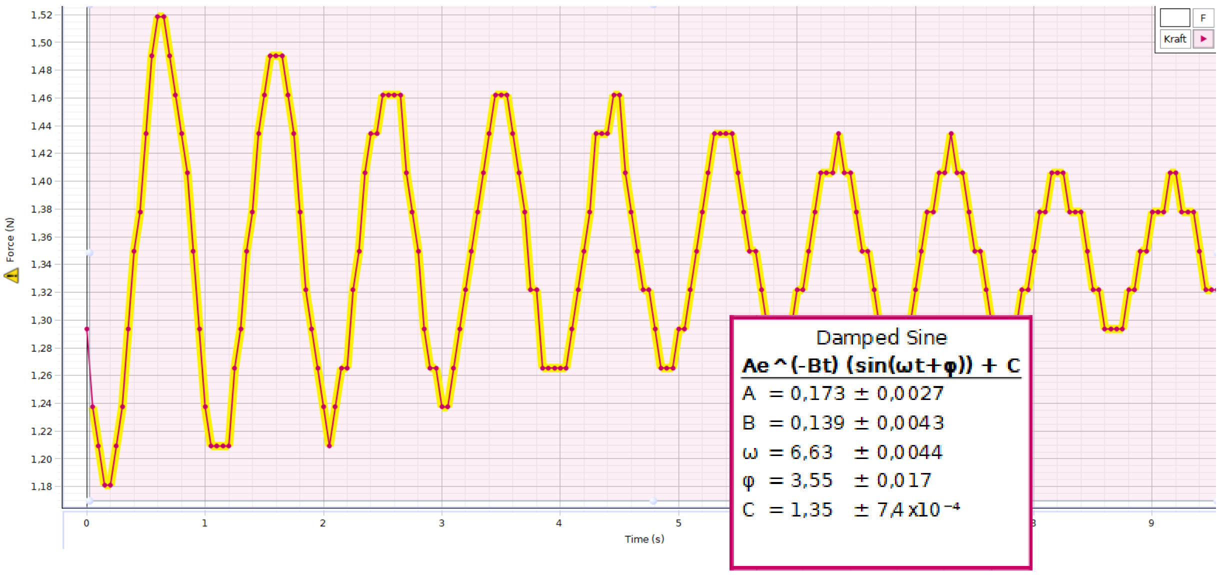


a) Hvilke krefter virker på loddet?

Tegn dem inn i en figur og forklar hva som bestemmer størrelsen og retningen til dem. Spesifiser tydelig med tanke på fortegn i forhold til loddets posisjon og bevegelse.

b) Begrunn ut fra kraftanalysen hvorfor det er rimelig at perioden til svingningene loddet gjør i vann er lengre enn om det svingte i luft.

Resultatene fra kraftsensoren ser du i figuren under. Kraften er målt i newton, N, og tida i sekunder, s, etter et vilkårlig startpunkt. Vi har kjørt en dempet sinus-regresjon til dataene. Resultatene er vist i figuren under.



c) Ser koeffisientene i regresjonen rimelige ut? Begrunn.

d) Hvor stor er fjærkonstanten i disse svingningene? Verifiser at enhetene stemmer.

e) Hva bidrar til usikkerhet i fjærkonstanten? Bestem en verdi for den.

f) Her er det gjort målinger med kraftsensor og datalogging. Hvordan vil du vurdere nytteverdien av å bruke videoanalyse i tillegg?

Svar:

a) Her er oppover valgt som positiv retning for *x* og vi ser på en situasjon der loddet har fartsretning nedover, dvs. farten er negativ.

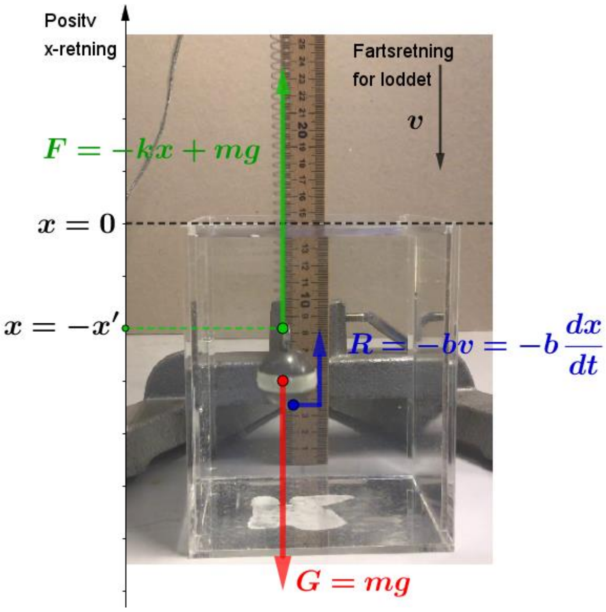
Tyngden *G* er konstant, og virker alltid nedover, i negativ retning.

Draget i fjæra virker alltid oppover og er generelt gitt ved

$$F = -kx + mg$$

Dersom loddet henger i ro, er $x = 0$:

$$F = mg = G$$



Dersom loddet befinner seg under likevektslinja er *x* negativ, og vi får en større kraft rettet oppover. Hvis posisjonen til loddet er over likevektslinja, er *x* positiv og dermed blir $F < mg$

Bremsekrafta *R* har alltid motsatt retning av farten.

Det vil i tillegg virke en oppdrift fra vannet, oppover på loddet. Denne vil være konstant så lenge hele loddet er nedsenket i vannet og dermed bare redusere *G* og heve posisjonen til likevektstillingen. (Men siden vi ikke har hatt fluidmekanikk forventes det ikke noe om dette.)

b) Siden *R* alltid virker mot farten, vil pendelkula få en lavere fart i svingningene den gjør og dermed bruke lengre tid.

c) Regresjonen som er gjort er på formen $F(t) = Ae^{-Bt} \cdot \sin(\omega t + \varphi) + C$

Her er *C* = likevektslinja, dvs. den verdien *F* svinger rundt og vil nærme seg når $t \to \infty$. Altså er $C = G = mg$ (når vi ser bort fra oppdriften). Når regresjonen gir $C = 1{,}35\ \text{N}$, innebærer det at loddet har masse $m = \frac{C}{g} = \frac{1{,}35\ \text{N}}{9{,}81\ \text{N/kg}} = 0{,}138\ \text{kg}$.
(Hvis man korrigerer for oppdriften, *O*:
O = tyngden av fortrengte væskemengde = tetthet til vann x volum x *g*
Det ser ut til at loddet har en radius på ca. 1 cm. Med bruk av formelen for volumet av en kule og at vannets massetetthet er 1000 kg/m^3, finner vi at dette kompenserer for en masse på 4 gram.)

Siden dette er en dempet svingning, avtar amplituden med tida, og vi kan ikke lese av verdien for *A* direkte. Derimot ser vi får startkraften ved å sette $t = 0$:

$$F(0) = A\sin\varphi + C = 0{,}173\sin(3{,}55) + 1{,}35 = 1{,}28\ \text{N}$$

Dette stemmer godt med det vi kan lese av grafisk.

Sammenhengen mellom vinkelfrekvens og periode er $\omega = \frac{2\pi}{T} \iff T = \frac{2\pi}{\omega}$

Regresjonen gir $\omega = 6{,}63$ slik at perioden blir $T = \frac{2\pi}{6{,}63} = 0{,}948$ s. Dette er vanskelig å lese av så nøyaktig grafisk, men vi ser at perioden er i underkant av 1 sekund. Altså ser dette rimelig ut.

Verdien *B* er faktoren i eksponentialleddet. Siden dette er en dempet svingning må

$B = \frac{b}{2m}$ der *b* er bremsefaktoren i bremsekraften. Den kjenner vi ikke, men hvis vi bruker verdien vi har for massen får vi $b = B \cdot 2m = 0{,}139 \cdot 0{,}138 = 0{,}0191$. Denne verdien er det vanskeligere å vurdere ut fra det vi ser av situasjonen.

d) Fjærkonstanten, *k:*
Vinkelfrekvensen i en dempet svingning er gitt ved

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - B^2}$ når *B* er faktoren gitt av regresjonen.

Dermed får vi at fjærkonstanten blir

$$k = (\omega^2 + B^2) \cdot m = (6{,}63^2 + 0{,}139^2) \cdot 0{,}138 = 6{,}05$$

Enheten vet vi skal være N/m, men dataregresjonen angir ingen enheter. Så her må vi bruke det vi vet om kreftene:

Siden $R = -bv$, blir enheten for *b* $[b] = \frac{[R]}{[v]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}} = \mathrm{N}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$

Enhet for faktoren *B*: $[B] = \frac{[b]}{[m]} = \frac{\mathrm{N}\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{s}}$

Enhet for vinkelfrekvensen *ω*: $[\omega] = \left[\frac{2\pi}{T}\right] = \frac{1}{\mathrm{s}}$

Enhet for fjærstivheten *k*: $[k] = [(\omega^2 - B^2) \cdot m] = \left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot \mathrm{kg} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

Samtidig har vi for *k*: $[k] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$ Stemmer!

e) Kilder til usikkerhet:
Vi ser det er veldig lav oppløsning på kraftmålingene samtidig som den oppgitte usikkerheten i *C* er veldig liten. Fra grafen ser det ut til at oppløsningen i kraftmålingene er på litt over 0,02 N. Nå blir dette midlet ut over svært mange målepunkter, slik at det likevel er mulig å få en svært nøyaktig verdi for *C.* Men siden beregningen av denne usikkerheten skjer i dataprogramvaren, er det vanskelig å vurdere om den er rimelig.

Et lodd som svinger i vann vil forårsake bevegelser i vannet. Derfor er det rimelig å tro at både bremsekraften og fjærkraften vil variere mer enn om loddet svingte i luft, og at dette bør forårsake en relativ stor usikkerhet i fjærkonstanten.

Verdi for usikkerheten i *k*:

$$\Delta k = \frac{k_{\mathrm{maks}} - k_{\mathrm{min}}}{2}$$

$k_{\mathrm{maks}} = ((\omega_{maks})^2 + (B_{maks})^2) \cdot m_{maks}$ og
$k_{\mathrm{min}} = ((\omega_{min})^2 + (B_{mmin})^2) \cdot m_{min}$

Verdiene for ω_{maks} og B_{min} finner vi fra usikkerhetene som er oppgitt i regresjonen. Den maksimale og minimale verdien for massen må vi bestemme fra oppgitte verdier for *C*:

$$m_{maks} = \frac{C_{maks}}{g_{min}} = \frac{(1{,}35 + 7{,}4 \cdot 10^{-4})\ \mathrm{N}}{9{,}805\ \mathrm{m/s^2}} = 0{,}13776\ \mathrm{kg}$$

$$m_{maks} = \frac{C_{min}}{g_{maks}} = \frac{(1{,}35 - 7{,}4 \cdot 10^{-4})\ \mathrm{N}}{9{,}815\ \mathrm{m/s^2}} = 0{,}13747\ \mathrm{kg}$$

Setter inn

$$k_{\mathrm{maks}} = ((6{,}63 + 0{,}0044)^2 + (0{,}139 + 0{,}0043)^2) \cdot 0{,}13776\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 6{,}06637\ \mathrm{N/m}$$
$$k_{\mathrm{min}} = ((6{,}63 - 0{,}0044)^2 + (0{,}139 - 0{,}0043)^2) \cdot 0{,}13747\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 6{,}03723\ \mathrm{N/m}$$

$$\Delta k = \frac{k_{\mathrm{maks}} - k_{\mathrm{min}}}{2} = \frac{(6{,}06637 - 6{,}03723)\ \mathrm{N/m}}{2} = 0{,}01457\ \mathrm{N/m}$$

Usikkerheten oppgis som regel med 1 gjeldende siffer. Dvs. at vi i dette tilfellet får

$$\Delta k = 0{,}01\ \mathrm{N/m}$$

(men dette er kanskje nettopp et slikt tilfalle der man kan oppgi to siffer).

Kommentar:
Dette er en svært lav usikkerhet, som baseres på de oppgitte verdiene for usikkerheten i regresjonskoeffisientene. Dersom man var tilstede under forsøket ville man hatt anledning til å vurdere rimeligheten av dem. Det er også mulig å komme til andre resultater ved å tenke på andre måter, f.eks. ved å bruke relativ usikkerhet. Hovedpoenget er å vise et tydelig og rimelig resonnement.

f) Mye av poenget i et slikt forsøk er å studere sammenhenger mellom kraft, akselerasjon, fart og posisjon. Hvis man kombinerer datalogging med kraftsensor med videoanalyse, får man registrert svingningene «fra hver sin ende». Videoanalyse registrere posisjon sfa. tid og beregner videre fart og akselerasjon ut fra disse målingene. Dataloggeren måler kraft, og vi kan da enkelt si noe om akselerasjonen, men det er ganske mye mer kronglete å kunne bestemme fart og posisjon ut fra dette. Så kort sagt: videoanalyse måler det som er vanskelig å finne fra dataloggingen, mens dataloggeren måler det vi ikke kan se i videoanalysen.

Oppgave 2 (Vekt: 25%)

Den ene enden av en horisontal streng er festet til en mekanisk vibrator som genererer transversale sinusbølger. Den andre enden av strengen går over en trinse, og i enden henger et lodd på 5,0 kg. Avstanden mellom vibratoren og trinsa er 2,5 m og strengen har en masse per lengdeenhet på 0,018kg/m.

a) *Forklar hvorfor det kan oppstå stående bølger på strengen. Hva skal til for at det skjer?*

b) *Det matematiske uttrykket for den stående bølgen er gitt som $y(x,t) = 2a\, sin\, kx \cdot sin\, \omega t$. Hva forteller dette uttrykket om den stående bølgen?*

c) *Finn tre frekvenser som den mekaniske vibratoren kan stilles til for at en kan få stående bølger på strengen.*

Du har laget et nytt, svært enkelt musikkinstrument av et rør og en streng. Røret har lengde L og diameter L/10 og er lukket i den ene enden. Du strekker en streng over åpningen på røret. Strengen har masse per lengdeenhet μ. For å få den effekten du ønsker skal grunnfrekvensen til lydbølgen i røret være lik frekvensen til andre overtone på strengen.

d) *Finn strekket til strengen uttrykt ved lydfarten i luft, v, og masse per lengdeenhet til strengen, μ, for at du skal oppnå dette.*

Svar:

a) Vibratoren sender hele tiden ut bølger på strengen. Disse vil reflekteres ved det faste endepunktet. Der vil utslaget endres 180° når bølgen reflekteres og sendes tilbake. Siden bølgen beveger seg bortover strengen, vil utslaget variere både med posisjon og tid. Men dersom lengden av strengen utgjør et helt antall buker, vil dette mønsteret gjenta seg i neste runde. Dvs. neste bølge følger i akkurat samme «spor» som den forrige. Dette gjelder også den reflekterte bølgen. Superposisjonen av den utsendte bølgen og den reflekterte gir da faste svingninger men med amplitude som varierer med posisjonen.

b) I den stående bølgen på strengen gjør alle punktene harmonisk svingninger gitt ved $y(x,t) = A(x) \cdot \sin \omega t$. Alle punktene på strengen svinger med samme vinkelfrekvens ω, men amplituden for hvert punkt varierer med posisjonen ut fra $A(x) = 2a\, sin\, kx$. Dette vil tilsvare omhyllingskurven til den stående bølgen. Da vil vi se at i enkelte punkter får vi konstruktiv interferens og svingninger med amplitude $2a$. I andre posisjoner får vi destruktiv interferens, dvs. utslokning, dvs. noder, med amplitude lik 0.

c) Vi stiller som betingelse at begge endene regnes som knutepunkt. Da er bølgelengden til grunntonen $\lambda_0 = 2L$ hvor *L* er lengden til strengen.

Farten til en bølge på en streng er gitt av: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ hvor F er strekket i strengen og µ er masse pr lengdeenhet. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{5{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{0{,}018 \text{ kg/m}}} = 52{,}2 \text{ m/s}$$

Vi får grunnfrekvensen $f_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{2L} = \frac{52{,}2 \text{ m/s}}{2 \cdot 2{,}5 \text{ m}} = 10{,}4 \text{ Hz}$

Med korrekt antall siffer: $f_0 = 10 \text{ Hz}$

De to neste frekvensene som gir stående bølger er:

$$f_1 = 2 \cdot f_0 = 21 \text{ Hz}$$

$$f_1 = 3 \cdot f_0 = 31 \text{ Hz}$$

c) Grunntonen til en lyd fra et rør som er lukket i en ende har en bølgelengde lik ¼ av lengden til røret.

Grunnfrekvensen til røret blir $f_{g,rør} = \frac{v}{4L}$

Grunntonen til en streng som er spent fast i begge ender har en bølgelengde lik den doble strenglengden. Frekvensen til grunntonen er: $f_{g,streng} = \frac{v_S}{2D}$ hvor D er lengden til strengen og v_S er bølgefarten på strengen som kan uttrykkes ved strekket i strengen, *F* og masse per lengdeenhet for strengen, μ. Frekvensen for grunntonen på strengen er da:

$$f_{g,streng} = \frac{1}{2D}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Frekvensen til andre overtone på strengen er tre ganger frekvensen til grunntonen.

Vi får $f_{2,streng} = \frac{3}{2D}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

Denne frekvensen skal være lik frekvensen til grunntonen i røret. Vi får

$$\frac{3}{2D}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{v}{4L}$$

Vi har gitt i oppgaven at D = L/10. Vi finner et uttrykk for strekket i strengen.

$$\frac{3\cdot 10}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{v}{4L} \Rightarrow \underline{\underline{F = \frac{\mu v^2}{3600}}}$$

Oppgave 3 (Vekt: 40%)

Anne er ute og spiller i skolekorpset og har stemt fløyta si. Hun har ei tverrfløyte som er åpen i begge ender. Når hun dekker for alle hullene spiller hun tonen C. Partikkelutsvinget til lydbølgen kan da beskrives som $y_1(x,t) = 1,20\cdot 10^{-7}m\cdot\cos(4,84m^{-1}\cdot x - 1646s^{-1}\cdot t)$

a) *Hva er tonens frekvens og bølgelengde?*
b) *Finn fasefarten og partikkelfarten.*
c) *Finn trykkamplituden til lydbølgen.*

Øret til Anne er svært nær lydkilden.

d) *Finn lydnivået og vurder om Anne kan få hørselsskader dersom hun øver mye.*

Knut kommer bort til Anne med sin fløyte og vil stemme den. Partikkelutsvinget til lydbølgen fra Knuts fløyte kan skrives: $y_1(x,t) = 1,00\cdot 10^{-7}m\cdot\cos(4,68m^{-1}\cdot x - 1590s^{-1}\cdot t)$

Summen til de to partikkelutsvingene er $y = y_1 + y_2$.

e) *Tegn grafene til* $y_1(x=0,t)$, $y_2(x=0,t)$ *og* $y(x=0,t)$ *for de to fløytene i det samme koordinatsystemet. Forklar den fysiske betydningen av grafene. Beskriv hvordan det vil høres når Knut og Anne spiller tonen C samtidig (før de stemmer fløytene).*

Svar:

Vi har lydbølgen: $y_1(x,t) = 1,20\cdot 10^{-7}m\cdot\cos(4,84m^{-1}\cdot x - 1646s^{-1}\cdot t)$ og sammenlikner med det generelle uttrykket for en bølge som beveger seg langs den positive *x* -aksen:
$y(x,t) = A\cos(k\cdot x - \omega\cdot t)$

a) Vi har da:

Amplituden: $A = 1,20\cdot 10^{-7}m$

Bølgetallet: $k = 4,84m^{-1}$

Vinkelfrekvensen: $\omega = 1646s^{-1}$

Frekvensen: $\underline{\underline{f}} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1646s^{-1}}{2\pi} = \underline{\underline{262Hz}}$

Bølgelengden: $\underline{\underline{\lambda}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4,84m^{-1}} = \underline{\underline{1,30m}}$

b) Fasefarten $\underline{\underline{v}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1646 s^{-1}}{4,84 m^{-1}} = \underline{\underline{340 m/s}}$

Vi finner partikkelfarten ved å derivere:

$$v_1(x,t) = \frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x} = 1,20 \cdot 10^{-7} m(-\sin(4,84 m^{-1} \cdot x - 1646 s^{-1} \cdot t)) \cdot (-1646 s^{-1})$$

$$\Rightarrow v_1(x,t) = 1,20 \cdot 10^{-7} \cdot 1646 m/s \cdot \sin(4,84 m^{-1} \cdot x - 1646 s^{-1} \cdot t)$$

Partikkelfarten: $\underline{\underline{v_1(x,t) = 1,98 \cdot 10^{-4} m/s \cdot \sin(4,84 m^{-1} \cdot x - 1646 s^{-1} \cdot t)}}$

c) Trykkvariasjonene er gitt av den deriverte av partikkelutsvinget med hensyn på tida og Bulk modulus.

$$p_1(x,t) = -B \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -B \cdot 1,20 \cdot 10^{-7} m \cdot (\sin(4,84 m^{-1} \cdot x - 1646 s^{-1} \cdot t) \cdot (4,84 m^{-1})$$

$$p(x,t) = -B \cdot 5,81 \cdot 10^{-7} \cdot \sin(4,84 m^{-1} \cdot x - 1646 s^{-1} \cdot t)$$

Bulk modulus for luft er: $B_{luft} = 1,42 \cdot 10^5 Pa$

Trykkamplituden: $\underline{\underline{p_{\max}(x,t)}} = 1,42 \cdot 10^5 Pa \cdot 5,808 \cdot 10^{-7} = \underline{\underline{8,25 \cdot 10^{-2} Pa}}$

d) Lydstyrken: $I = \frac{1}{2} B\omega k A^2$

Lydnivået måles i desibel: $\beta = 10 dB \log \frac{I}{I_0}$ hvor $I_0 = 10^{-12} W/m^2$

Vi får:

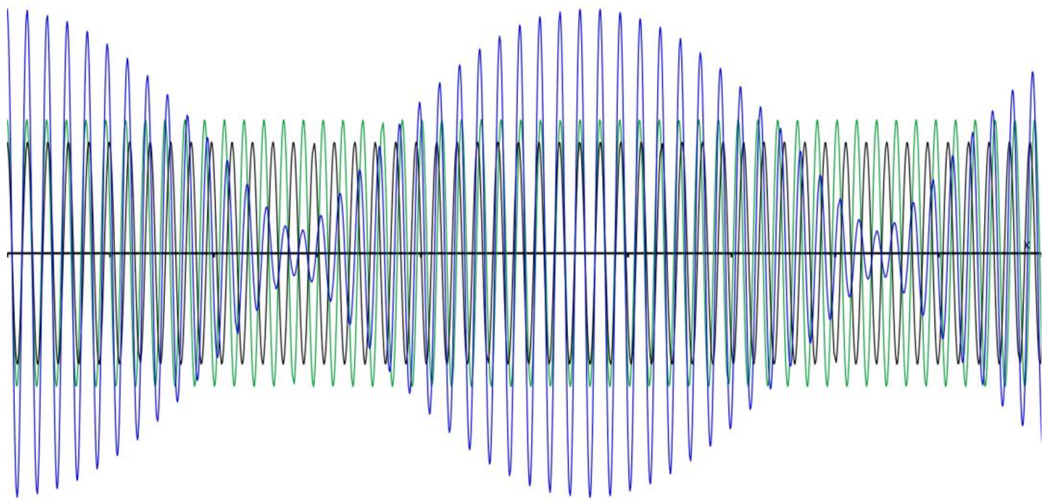
$$\beta = 10 dB \log\left(\frac{B\omega k A^2}{2 I_0}\right)$$

$$= 10 dB \log\left(\frac{1,42 \cdot 10^5 \cdot 1646 \cdot 4,84 \cdot (1,2 \cdot 10^{-7})^2}{2 \cdot 10^{-12}}\right) = 69,1 dB$$

Lydnivået er <u>69 dB.</u>

Dette tilsvarer lydnivået i en travel trafikkert gate og kan vel aksepteres hvis det ikke blir for langvarig.

e) Grafen under viser lydbølgene fra Anne (blå), fra Knut(svart) og summen av de to blå.



Vi vil høre lyd med en varierende intensitet.Det skyldes at frekvensene er nesten like, og at summen av dem da sakte varierer fra å være dobbelt så høy til å utslokke hverandre.

Frekvensen til intensitetvariasjonen kalles svevefrekvensen og er gitt ved

$$f_s = f_1 - f_2 = \frac{1}{2\pi}(\omega_{Anne} - \omega_{Knut}) = \frac{1}{2\pi}(1646\ \mathrm{s}^{-1} - 1590\ \mathrm{s}^{-1}) = 8{,}9\ \mathrm{Hz}$$