NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Program for lærerutdanning

Eksamensoppgave
FY6016 Mekaniske bølger og eksperimentelt arbeid

Faglig kontakt under eksamen:	Astrid Johansen
Tlf.:	918 22 404

Eksamensdato:	1.juni 2016
Eksamenstid (fra-til):	kl.09.00 – 13.00
Tillatte hjelpemidler:	Alle skriftlige hjelpemidler
	Kalkulator uten nettilkobling
Annen informasjon:	Vurderingskriterier: se s.2
Målform/språk:	Bokmål
Antall sider (uten forside):	4
Antall sider vedlegg:	Ingen
Sensurdato:	22.06.2016

Kontrollert av:

Dato Sign

Vurderingskriterier

Ved vurderingen vektlegges din evne til å

- gjøre greie for fysiske fenomener
- formidle fysiske resonnementer
- gjøre greie for kvalitative vurderinger
- regne korrekt
- presentere besvarelsen

Vekting

Prosentene på hver oppgave indikerer hvor mye den teller i det endelige resultatet for hele denne eksamensoppgaven.

I forhold til endelig karakter i emnet FY6016 teller denne eksamensoppgaven 45%, mens prosjekt teller 40 % og rapport 15%.

Annen informasjon

Generelt forventes det at du finner fram til nødvendige formler og konstanter i de skriftlige hjelpemidlene du bruker. Men i en del tilfeller er det variasjoner i verdier som blir oppgitt. Derfor kan du bruke følgende

- tetthet for stål: 7700 kg/m^3
- lydfart i luft (når forholdene ikke er spesifiserte): 344 m/s

Oppgave 1 (Vekt 35%)

En mekanisk vibrator genererer transversale bølger på en streng i den ene enden av strengen. Dette punktet definerer vi som $x = 0$. Strengen strammes av et lodd som henger i den andre enden av strengen via en trinse. Loddet har masse 500 g. Frekvensen til vibratororen er 120 Hz og amplituden er 2,50 cm. 10,0 m av strengen har masse 13,6 g.

a) *Hva er hastigheten til de transverselle bølgene på strengen?*

b) *Hvor lang må strengen være for at den påtrykte frekvensen skal gi stående transversale bølger tilsvarende 2.overtone på strengen?*

c) *Skriv uttrykket for bølgebevegelsen på formen*

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

To gitarstrenger består begge av stål og har eksakt samme lengde 65,0 cm og strekk i strengen på 100 N. Men den ene strengen har radius på 0,30 mm, mens den andre strengen har 1,0% mindre radius.

d) *Hvorfor vil denne ulikheten forårsake sveving?*
e) *Hva blir svevefrekvensen til grunntonen?*

Svar:

a) Bølgefarten for transversale bølger på en streng er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Her er F = tyngden av loddet $= mg = 0{,}500\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 4{,}905\ \text{N}$

og massen per meter av strengen $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{13{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}{10{,}0\ \text{m}} = 1{,}36 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/m}$

Dvs. $v = \sqrt{\dfrac{4{,}905\ \text{N}}{1{,}36 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/m}}} = 60{,}1\ \text{m/s}$

b) 2.overtone vil si at lengden av strengen utgjør 1,5 bølgelengder. Bølgelengden til bølgen som forplanter seg på strengen er

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{60{,}1\ \text{m/s}}{120\ \text{Hz}} = 0{,}500\ \text{m}$$

Det betyr at strengen må ha lengde $L = \frac{3}{2} \cdot \lambda = 0{,}75\ \text{m}$

c) Fra innledningsteksten har vi direkte at amplituden til bølgebevegelsen blir
$A = 2{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$

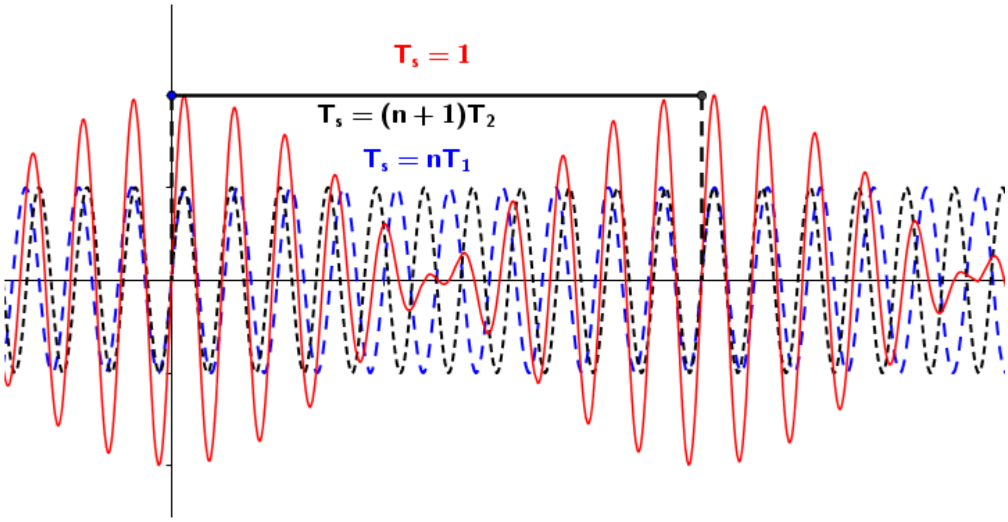
Definisjon av bølgetallet *k* er $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. I oppgave b) fant vi at $\lambda = 0{,}500\ \text{m}$ og dermed

$k = \frac{2\pi}{0{,}500\ \text{m}} = 12{,}6\ \text{m}^{-1}$ $\left(\text{evt. } k = 4\pi\ \text{m}^{-1}\right)$

Vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 120\ \text{Hz} = 754\ \text{s}^{-1}$

Bølgebevegelsen blir dermed $y(x,t) = 2{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \cos(12{,}6\ \text{m}^{-1} \cdot x - 754\ \text{s}^{-1} \cdot t)$

d) Når radiusen til strengene er litt ulik, medfører det at de har litt ulik μ (forutsatt at materialet og lengden er lik). Dermed vil bølgefarten på de to strengene bli litt ulik, og det igjen gir litt ulik frekvens og bølgelengde. Når to bølger med litt forskjellig frekvens superponerer får vi fenomenet *sveving*. dvs. en variasjon i intensiteten med en mye lavere frekvens en frekvensene til enkleltbølgene.



Utdyping: I figuren har den svarte og den blå bølgen nesten lik frekvens. Den røde bølgen viser summen av de to. Når to maksimale utslag inntreffer, i fase, får vi maksimalt utslag på resultantbølgen. Men siden frekvensen ikke er helt lik for de to bølgene, vil bølgetoppene skli fra hverandre, etter hvert nulle hverandre ut, for så å nærme seg hverandre igjen. Neste gang to bølgetopper faller sammen er når den ene bølgen har gjennomført 1 hel svingning mer enn den andre.

Dermed får vi generelt at perioden for «svevebølgen» (som vi oppfatter som en langsom variasjon i lydintensiteten) kan skrives

$$T_s = nT_1 = (n+1)T_2$$

eller at

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{nT_1} = \frac{1}{(n+1)T_2} \quad \Leftrightarrow \quad f_s = \frac{1}{n} f_1 = \frac{1}{n+1} f_2$$

Da kan frekvensene for bølge 1 og 2 skrives

$$f_1 = nf_s \qquad \text{og} \qquad f_2 = (n+1) f_s$$

Dermed ser vi at $f_2 - f_1 = (n+1)f_s - nf_s = f_s$

e) For å finne svevefrekvensen, må vi først finne uttrykk for de to hastighetene

$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\mu_1}} \qquad \text{og} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{F}{\mu_2}}$$

der
$$\mu_1 = \frac{m_1}{L} = \frac{\rho \cdot V_1}{L} = \frac{\rho \cdot \pi r_1^2 L}{L} = \rho \cdot \pi r_1^2$$

og tilsvarende $\mu_2 = \rho \cdot \pi r_2^2$

Sammenhengen mellom radiene er $r_2 = 0{,}99 r_1$

Dermed får vi at

$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi r_1^2}} = \sqrt{\frac{100\ \text{N}}{7700\ \text{kg/m}^3 \cdot \pi \cdot \left(0{,}30 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)^2}} = 172{,}8\ \text{m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi r_2^2}} = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi \left(0{,}99 r_1\right)^2}} = \frac{1}{0{,}99}\sqrt{\frac{F}{\rho \pi r_1^2}} = \frac{1}{0{,}99} v_1 = \frac{172{,}8\ \text{m/s}}{0{,}99} = 174{,}5\ \text{m/s}$$

Når strengene svinger med grunntonen blir de tilhørende frekvensene

$$f_1 = \frac{v_1}{\lambda} = \frac{v_1}{2L} = \frac{172{,}8\ \text{m/s}}{2 \cdot 0{,}650\ \text{m}} = 132{,}9\ \text{Hz}$$

$$f_1 = \frac{v_2}{\lambda} = \frac{v_2}{2L} = \frac{174{,}5\ \text{m/s}}{2 \cdot 0{,}650\ \text{m}} = 134{,}3\ \text{Hz}$$

og svevefrekvensen blir

$$f_s = f_2 - f_1 = 134{,}3\ \text{Hz} - 132{,}9\ \text{Hz} = 1{,}4\ \text{Hz}$$

Oppgave 2 (Vekt 25%)

Du er ute og kjører på motorveien og hører en politibil med fulle sirener nærme seg i motgående kjørefelt. Du holder en konstant fart på 90 km/h og registrerer en tydelig frekvensendring i det politibilen passerer. Sirenen sender ut en fast frekvens på 660 Hz. Før politibilen passerer, registrerer du en frekvens på 801 Hz.

a) *Hvilken frekvens registrerer du etter at politibilen har passert?*

En lydsensor som sto i ro ved siden av veien registrerte en lydintensitet på 100 dB i det politibilen passerte. Da var avstanden 10,0 m.

b) *Hvor stor lydeffekt sendte sirenen ut?*
c) *Hvor langt unna sirenen må politibilen være for lydnivået som lyden fra sirenen forårsaker er lavere enn 40 dB?*

Svar:

a) Generelt har vi at

$$f_O = \frac{v + v_O}{v + v_S} \cdot f_s$$

der indeks *S* angir kilde, og indeks *O* angir observatør.

Vi må skille mellom de to tilfellene før og etter politibilen har passert siden positiv retning hele tiden er definert som fra observatør mot kilde. Dvs. at når politibilen kommer mot deg er v_S negativ og v_O positiv

$$f_{O,før} = \frac{v + v_O}{v - v_S} \cdot f_s$$

Her er farten til politibilen v_S ukjent, så vi bestemmer den først

$$v - v_S = (v + v_O) \cdot \frac{f_S}{f_O}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_S = v - (v + v_O) \cdot \frac{f_S}{f_O} = 344\ \text{m/s} - (344 + 25)\ \text{m/s} \cdot \frac{660\ \text{Hz}}{801\ \text{Hz}} = 40{,}0\ \text{m/s}$$

Etter passering er fortegnene til v_S og v_O motsatte, dvs.

$$f_{O,etter} = \frac{v - v_O}{v + v_S} \cdot f_S$$

og frekvensen observatøren hører etter passering blir

$$f_{O,etter} = \frac{344\ \text{m/s} - 25\ \text{m/s}}{344\ \text{m/s} + 40\ \text{m/s}} \cdot 660\ \text{Hz} = 548\ \text{Hz}$$

b) Sammenheng mellom effekten P og intensiteten I er gitt ved

$$I = \frac{P}{A}$$ der A er arealet effekten fordeles over.

Bestemmer lydintensiteten ut fra definisjonen av dB

$$\beta = 10\ \text{dB} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{der} \qquad I_0 = 1{,}00 \cdot 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

$$\Rightarrow\ 100\ \text{dB} = 10\ \text{dB} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{10}$$

$$\Leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^{10} = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\ \text{W/m}^2$$

I dette tilfellet er det ikke opplagt hvor stort areal lydeffekten brer seg over, men jeg antar at bakken reflekterer lyden slik at den brer seg utover et halvt kuleskall, dvs. $A = 2\pi r^2$. I så fall blir effekten

$$P = I \cdot A = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\ \text{W/m}^2 \cdot 2\pi \cdot (10{,}0\ \text{m})^2 = 6{,}28\ \text{W}$$

c) Et lydnivå på 40 dB tilsvarer lydintensiteten

$$40\ \text{dB} = 10\ \text{dB} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^4 = 1{,}00 \cdot 10^{-8}\ \text{W/m}^2$$

Siden den utsesndte effekten er konstant, har vi at

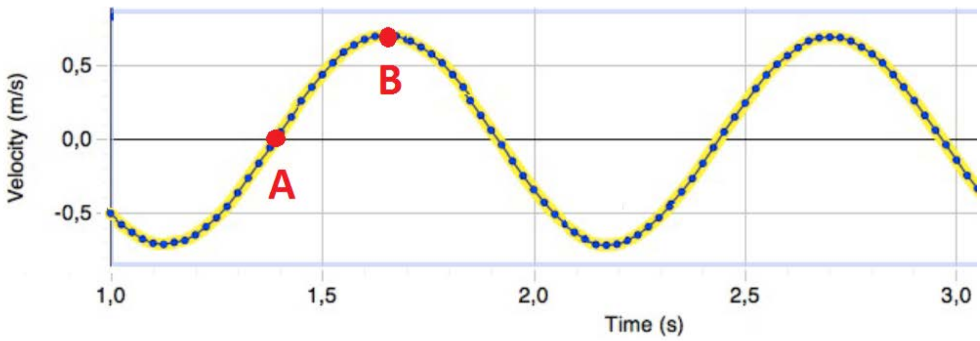
$$I_1 \cdot 2\pi r_1^2 = I_2 \cdot 2\pi r_2^2 \Leftrightarrow \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{I_1}{I_2}$$

$$\Leftrightarrow r_2 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = 10{,}0\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{1{,}00 \cdot 10^{-2}\ \text{W/m}^2}{1{,}00 \cdot 10^{-8}\ \text{W/m}^2}} = 10{,}0\ \text{m} \cdot 10^3 = 10\ \text{km}$$

Oppgave 3 (Vekt 40%)

I et laboratorieforsøk ble bevegelsen til et lodd som oscillerte vertikalt i en spiralfjær registrert med en bevegelsessensor. Sensoren lå i ro på benken og registrerte den vertikale bevegelsen over seg. Se figuren ved siden av. Massen til loddet var 200 g.

Figuren under viser hvordan den vertikale farten endret seg med tida.



a) *Beskriv loddets posisjon i svingebevegelsen og bevegelsen det har i punktene A og B.*

b) *Les av de verdier du trenger fra grafen, og bestem et matematisk uttrykk (uten bruk av regresjon) som beskriver farten til loddet best mulig.*

c) *Beregn den maksimale avstanden loddet har til likevektsposisjonen og den maksimale akselerasjonen.*

d) *Skisser grafene for posisjon og akselerasjon i samme koordinatsystem som fartsgrafen. (NB! Du trenger ikke å bruke felles skala på 2.aksen for de tre funksjonene. Men angi viktige punkt og verdier på grafene.)*

Nå plasserer vi et kar med vann under loddet slik at det hele tida svinger under vann. Fjæra som brukes har fjærkonstant 7,0 N/m. Loddet blir satt i svingninger og perioden til svingningene blir 1,2 s.

e) *Tegn en figur som viser farten og kreftene som virker på massen.*

f) *Finn dempningskonstanten til systemet. Er verdien rimelig? Begrunn.*

Svar:

a) Siden sensoren ligger på bordet og ser opp mot loddet, er positiv retning definert som oppover. Dvs. at positiv fart betyr økende avstand fra sensoren og dermed at loddet beveger seg oppover. I punkt B er farten maksimal og positiv. Det må bety at loddet passerer likevektslinja på vei oppover.

I punkt A er farten 0. Da må loddet være i et av ytterpunktene. Siden farten skifter fra å være negativ (dvs. på vei mot sensoren) til å bli positiv (dvs. på vei fra loddet), må loddet befinne seg nærmest sensoren.

b) Vi ser at grafen er en sinus- (evt. cosinus-) funksjon, og skrives generelt på formen

$$v(t) = v_{maks} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Fra grafen leser vi av amplituden, dvs. $v_{maks} = 0{,}70 \text{ m/s}$

og perioden $T = 1{,}05 \text{ s}$

Dermed blir vinkelfrekvensen $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{1{,}05 \text{ s}} = 6{,}0 \text{ rad/s}$

og dermed har vi

$$v(t) = v_{maks} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0{,}70 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}0 \text{ rad/s} \cdot t + \varphi)$$

For å finne faseforskyvningen, kan vi sette inn et punkt på grafen. F.eks. ser vi at

$$v(t = 1{,}4 \text{ s}) = 0$$

Da må

$$\sin(6{,}0 \text{ rad/s} \cdot 1{,}40 \text{ s} + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6{,}0 \text{ rad/s} \cdot 1{,}40 \text{ s} + \varphi = 0 + n \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi = -8{,}4 \text{ rad} + n \cdot 2\pi$$

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -2{,}1 \text{ rad}$$

og fartsfunksjonen kan skrives

$$v(t) = 0{,}70 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}0 \text{ rad/s} \cdot t - 2{,}1 \text{ rad})$$

c) Den generelle posisjonsfunksjonen kan skrives

$$s(t) = s_{maks} \cdot \cos(\omega + \varphi)$$

og at $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt} = -s_{maks}\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Dermed ser vi at $v_{maks} = \omega s_{maks} \quad \Leftrightarrow \quad s_{maks} = \dfrac{v_{maks}}{\omega} = \dfrac{0{,}70 \text{ m/s}}{6{,}0 \text{ rad/s}} = 0{,}12 \text{ m}$

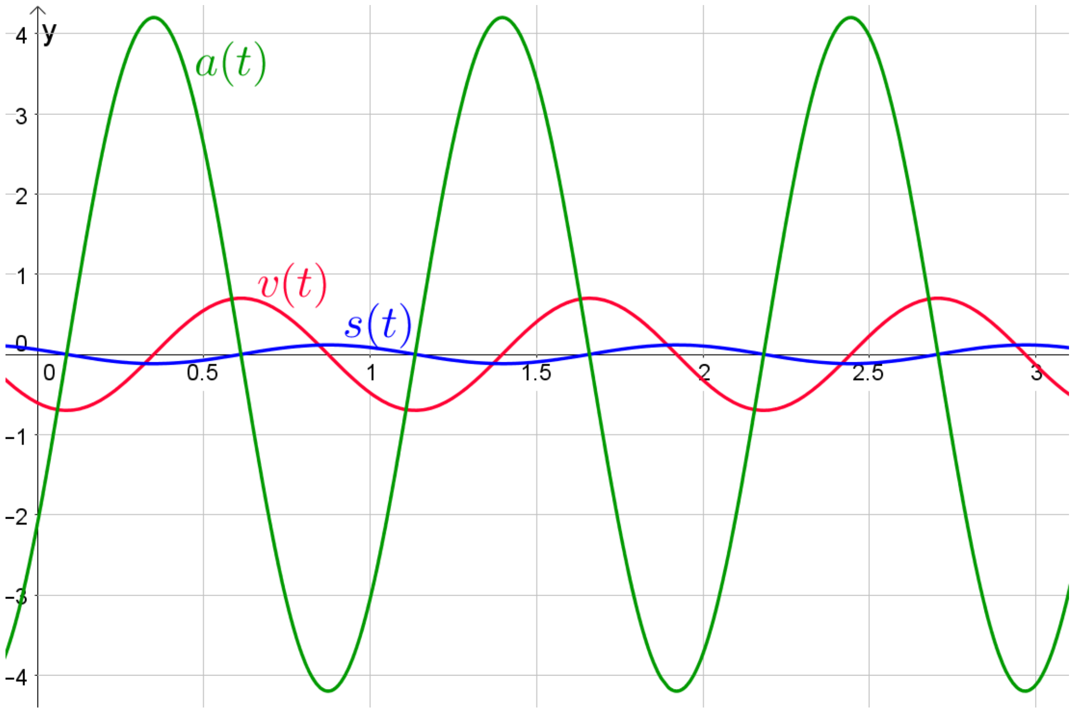
Akselerasjonsfunksjonen er den tidsderiverte av fartsfunksjonen, dvs.

$$a(t) = \quad a(t) = v_{maks}\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

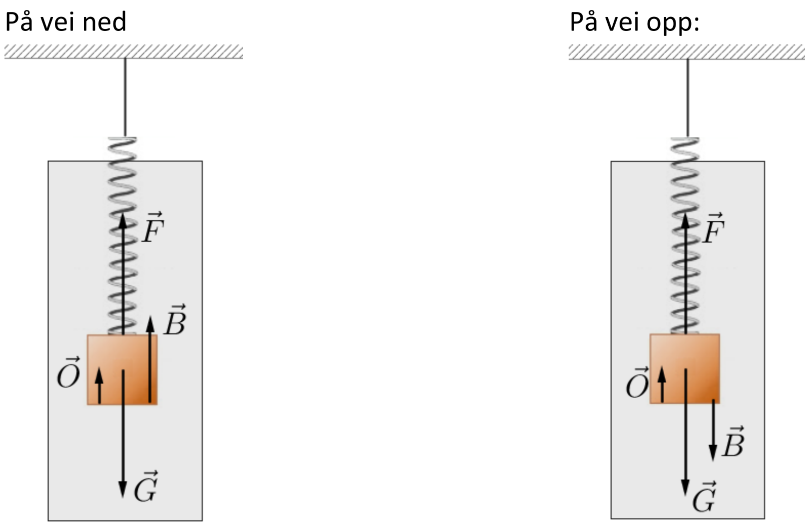
Dermed blir den maksimale akselerasjonen

$$a_{maks} = v_{maks}\omega = 0{,}70 \text{ m/s} \cdot 6{,}0 \text{ rad/s} = 4{,}2 \text{ m/s}^2$$

d) Grafisk framstilt



e) Kreftene som virker på loddet:



Tyngden *G*, og oppdriften *O* er konstante gjennom svingebevegelsen og bidrar ikke til nettokraften.

Fjærkraften er gitt ved $F = -k\Delta x$

og bremsekraften er $B = -bv$

f) Dempede svingninger får lavere vinkelfrekvens enn frie svingninger. Den nye vinkelfrekvensen er gitt ved

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \wedge \qquad \omega' = \frac{2\pi}{T'}$$

Kombinerer disse og løser uttrykket med hensyn på dempningskonstanten *b*

$$\frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{b^2}{4m^2} = \frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad b = \sqrt{4km - 4m^2\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 7{,}0\ \text{N/m} \cdot 0{,}200\ \text{kg} - 4 \cdot (0{,}200\ \text{kg})^2 \left(\frac{2\pi}{1{,}2\ \text{s}}\right)^2} = 1{,}1\ \text{kg/s}$$

Siden systemet tross alt svinger, må det være underkritisk dempet. I så fall skal $b < 2\sqrt{mk}$.

I dette tilfellet får vi $2\sqrt{mk} = 2\sqrt{0{,}200\ \text{kg} \cdot 7{,}0\ \text{N/m}} = 2{,}36\ \text{kg/s}$ $\quad > \ 1{,}1\ \text{kg/s}$

Dermed ser vi at dempingskonstanten vi får er rimelig.