Løsningsforslag

Eksamen FY6016 Mekaniske bølger og eksperimentelt arbeid, høst 2017

Oppgave 1

En transversell bølge er gitt ved

$$y(x,t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m} \cdot \sin 2\pi\left[\left(2{,}5\ \text{m}^{-1}\right)x + \left(50\ \text{s}^{-1}\right)t\right]$$

a) *Hva er bølgens bølgelengde, periode og fart?*

Den ene enden av en horisontal streng er festet til en mekanisk vibrator som svinger med en gitt frekvens. Den andre enden av strengen går over en trinse, og i enden henger et lodd på 5,0 kg. Strengen har en masse per lengdeenhet på 0,018kg/m.

b) *Hva er farten til de transverselle bølgene på strengen?*

Dersom betingelsene er riktige, kan det oppstå stående bølger på strengen Den stående bølgen y_s *kan beskrives matematisk ved* $y_s(x,t) = 2A\sin kx \sin \omega t$.

c) *Hvordan kan man se karakteristiske trekk til en stående bølge ut fra dette uttrykket?*

Lengden til strengen er 65 cm.

d) *Finn de laveste tre frekvenser som den mekaniske vibratoren kan ha som vil gi stående bølger på strengen.*

Løsning:

a) Sammenlikner det oppgitte uttrykket med det generelle uttrykket for en sinusformet bølge

$$y(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t\right) \quad \text{der} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{og} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Altså får vi

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}5\ \text{m}^{-1}} = 2{,}5\ \text{m} \qquad \text{og} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50\ \text{s}^{-1}} = 0{,}13\ \text{s}$$

Og farten blir

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2{,}51\ \text{m}}{0{,}126\ \text{s}} = 20\ \text{m/s} \qquad \text{evt.} \qquad v = \frac{\omega}{k} = \frac{50\ \text{s}^{-1}}{2{,}5\ \text{m}^{-1}} = 20\ \text{m/s}$$

b) Farten til transversale bølger på en streng er gitt ved $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ der F er den horisontale strammingen av strengen (= stramming når strengen er upåvirket) og μ er strengens masse per lengdeenhet. Her er det tyngden av loddet som forårsaker strammingen, dvs.

$F = G_{lodd} = mg = 5{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 49\ \text{N}$

Farten blir

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{49\ \text{N}}{0{,}018\ \text{kg/m}}} = 52\ \text{m/s}$$

c) Karakteristiske trekk ved stående bølger er at alle punktene på strengen svinger som en harmonisk oscillator, men der amplituden varierer med posisjonen på strengen. Noen steder er det *knuter* der utsvinget hele tiden er null, mens punktet midt mellom to knuter svinger med maksimal amplitude. Dette finner vi igjen i uttrykket $y_s(x,t) = 2A \sin kx \sin \omega t$ ved at faktoren $\sin \omega t$ definerer en harmonisk oscillator. Faktoren foran, $2A \sin kx$, angir da amplituden til den harmoniske oscillatoren. Den ser vi er en funksjon av *x*, og varierer dermed med posisjonen. Men for en gitt *x*-verdi har $2A \sin kx$ en bestemt verdi. Dvs. at i denne posisjonen svinger strengen med den samme amplituden for alle verdier av *t*. Den største amplituden vi kan få er 2*A* (dvs. buk) og den minste er 0 (dvs. knute).

Buker med amplitude 2*A* får vi dersom $\sin kx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad kx = \frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$

Knuter med amplitude 0 får vi dersom $\sin kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kx = \pm n \cdot \pi$

d) De tre laveste frekvensene som gil stående bølger dersom strengen er 0,65 m lang:

Har fra b) at farten til bølgen på strengen er $v = 52\ \text{m/s}$ og vet at $f = \frac{v}{\lambda}$

$n = 1$: En buk mellom endepunktene. Dvs. $L = \frac{1}{2}\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2L = 1{,}3\ \text{m}$

Grunnfrekvensen: $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} = \frac{52\ \text{m/s}}{1{,}3\ \text{m}} = 40\ \text{Hz}$

$n = 2$: To buker mellom endepunktene. Dvs. $L = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = L = 0{,}65\ \text{m}$

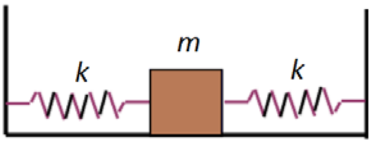
1.overtone: $f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2 \cdot \frac{v}{2L} = 2 \cdot f_1 = 2 \cdot 40\ \text{Hz} = 80\ \text{Hz}$

$n = 3$: Tre buker mellom endepunktene. Dvs. $L = \frac{3\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{3}$

1.overtone: $f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{\frac{2L}{3}} = 3 \cdot \frac{v}{2L} = 3 \cdot f_1 = 3 \cdot 40\ \text{Hz} = 120\ \text{Hz} = 0{,}12\ \text{kHz}$

Oppgave 2

En kloss med masse m ligger på et horisontalt underlag og er festet mellom to identiske fjærer som følger Hookes lov både ved sammenpressing og utstrekning. Fjærene har fjærkonstant k. Se figuren under.



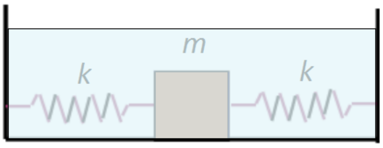
Klossen trekkes ut en avstand x fra likevektsstilling og slippes. Vi ser bort fra friksjon.

a) *Begrunn hvorfor vinkelfrekvensen for systemet er gitt som* $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

Klossen har masse 1,20 kg og fjærkonstantene er 10,5 N/m. Vi trekker den 25,0 cm til høyre for likevektposisjonen og slipper.

b) *Bestem den maksimale farten og akselerasjonen klossen får i bevegelsen som oppstår etter at den er sluppet. Hvor skjer dette? Begrunn.*

Nå fyller vi vann mellom sideveggene. Når klossen svinger nå, vil den bli utsatt for en bremsende kraft fra vannet. Vi antar at bremsekrafta er proporsjonal med farten, dvs. $R = -bv$.

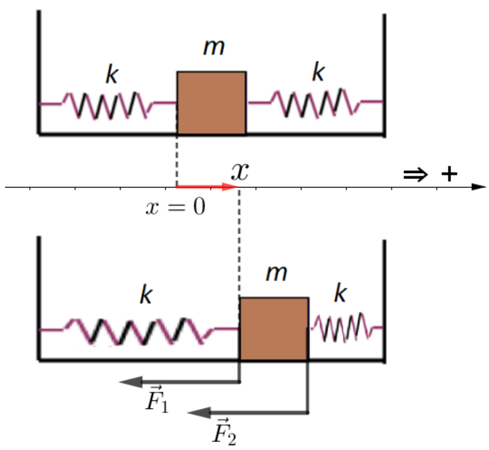


Vi slipper klossen fra samme utgangsposisjon som i b). Når farten til klossen er 0,350 m/s, er den bremsende kraften $R = 1{,}40\ \mathrm{N}$. *Vi ser bort fra oppdriften.*

c) *Hva blir vinklefrekvensen til svingningene?*

d) *Hvor lang tid tar det før amplituden er redusert til 20% av den opprinnelige amplituden?*

Løsning:



a) Fjærene er identiske og følger Hookes lov, dvs. $F = -kx$ gjelder både for utstrekking og sammenpressing. Dersom klossen skyves en avstand *x* til høyre og slippes, vil begge fjærene virke med en kraft tilbake mot likevektsstillingen. Se figuren under.

Den venstre fjæra vil strekkes en avstand *x* og den høyre presses sammen tilsvarende avstand *x*. Da vil $F_1 = F_2 = -kx$, og summen av kreftene som virker på klossen er $\Sigma F = -2kx$. Dette vil si at summen av kreftene er proporsjonale med avstanden fra likevektsstillingen og virker hele tida inn mot likevekt. Dvs. vi har harmoniske svingninger.

Newtons 2.lov gir

$$F_1 + F_2 = ma \quad \Rightarrow \quad -2kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Dersom vi sammenlikner med tilfellet med 1 fjær, gir Newtons 2.lov på tilsvarende måte at bevegelsen beskrives av differensiallikningen

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ der vinkelfrekvensen er gitt ved $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

For situasjonen vår med 2 fjærer som resulterer i en dobbelt så stor kraft, ser vi at vinklefrekvensen blir

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Dvs. vi kan erstatte de to fjærene med en fjær med dobbelt så stor fjærkonstant.

b) Gitt at $m = 1{,}20\ \text{kg}$, $k = 10{,}5\ \text{N/m}$ og $x = 0{,}250\ \text{m}$. Når klassen slippes, vil den svinge som en harmonisk oscillator om likevektsstillingen $x = 0$. Da er posisjonen til klossen gitt ved

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Vi slipper klossen ved $t = 0$. Det betyr at $A = x = 0{,}250\ \text{m}$ og $\phi = 0$. Farten til klossen blir

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin \omega t$$

Dermed ser vi at den maksimale farten klossen kan ha er

$$v_{maks} = A\omega = A\sqrt{\frac{2k}{m}} = 0{,}25\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10{,}5\ \text{N/m}}{1{,}20\ \text{kg}}} = 1{,}05\ \text{m/s}$$

Alternativ kunne vi ha funnet dette ved energibevaring.

Akselerasjonen til klossen

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t$$

Maksimal akselerasjon

$$a_{maks} = A\omega^2 = A \cdot \frac{2k}{m} = 0{,}25\ \text{m} \cdot \frac{2 \cdot 10{,}5\ \text{N/m}}{1{,}20\ \text{kg}} = 4{,}38\ \text{m/s}^2$$

Vi har maksimal fart der $\Sigma F = 0$, dvs. når klossen passerer likevektsstillingen. Det kan også begrunnes ut fra energiforhold: her har all potensiell energi i fjærene gått over til kinetisk energi.

Fra Newtons 2.lov $\Sigma F = ma$ har vi at maksimal akselerasjon inntrer der summen av kreftene på klossen er størst mulig. Her er det bare fjærkreftene som forårsaker akselerasjon, og de er størst mulige i ytterstillingene. Dvs. akselerasjonen er størst i ytterstillingene.

c) Denne situasjonen vil gi dempede svingninger der vinkelfrekvensen er gitt ved

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Her er ω vinklefrekvensen uten demping, dvs. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{17{,}5}\,\text{rad/s} = 4{,}18$ rad/s

b er dempningskonstanten, $b = \left|\frac{R}{v}\right| = \frac{1{,}40\ \text{N}}{0{,}350\ \text{m/s}} = 4{,}00$ kg/s

Altså blir den nye vinkelfrekvensen

$$\omega' = \sqrt{17{,}5\ (\text{rad/s})^2 - \left(\frac{4{,}00\ \text{kg/s}}{2\cdot 1{,}20\ \text{kg}}\right)^2} = 3{,}84\ \text{rad/s}$$

d) Posisjonen ved dempede svingninger er gitt ved

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}\cdot t}\left(\cos\omega' t + \phi\right)$$

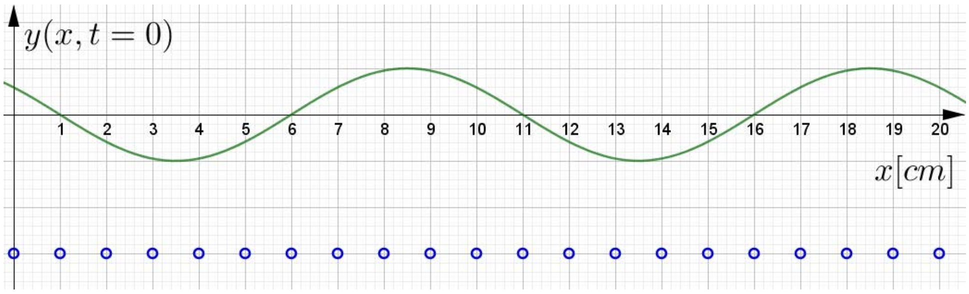
Siden vi har at $x(0) = A = x$, er $\phi = 0$. 20% av opprinnelig amplitude vil si at

$$0{,}20A = Ae^{-\frac{b}{2m}\cdot t} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-\frac{b}{2m}\cdot t} = 0{,}20 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{b}{2m}\cdot t = \ln 0{,}20 \quad\Leftrightarrow\quad t = -\frac{2m}{b}\ln 0{,}20$$

$$\Rightarrow \qquad t = -\frac{2\cdot 1{,}20\ \text{kg}}{4{,}00\ \text{kg/s}}\cdot \ln 0{,}20 = 0{,}966\ \text{s}$$

Oppgave 3

I figuren under viser partikkelutsvinget til i en lydbølge i luft ved 20°C som funksjon av posisjonen. De små, blå sirklene illustrerer luftpartikler som ikke er påvirket av lyden.



a) *Bruk figuren over til å bestemme hvor lydtrykket er størst og minst. Forklar hvordan du tenker.*

b) *Begrunn hvorfor det er rimelig at lydtrykket er gitt som* $p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$.

c) *Partikkelutsvinget i figuren er gitt på formen* $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ *der amplituden er* $1{,}00 \cdot 10^{-6}$ m . *Bestem k og* ω. *Hva blir frekvensen?*

d) *Utled et uttrykk for lydtrykket og vis at det maksimale lydtrykket denne lydbølgen har er 8,92 Pa.*

Intensiteten er uttrykk for den midlere effekten per arealenhet. Dvs. vi kan skrive

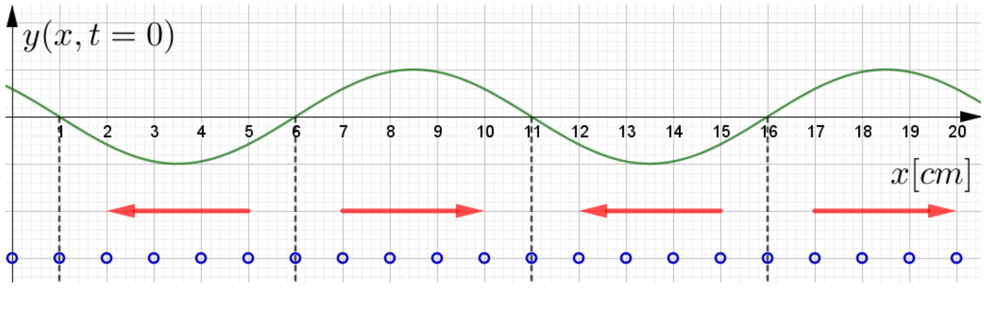
$$I(x,t) = \frac{P(x,t)_{av}}{A} = \left(p(x,t) \cdot v_y(x,t)\right)_{av}.$$

e) *Vis at intensiteten kan skrives* $I = \frac{1}{2} B\omega k A^2$.

f) *Hvilket lydnivå har vi i dette tilfellet?*

Løsning:

a) Når partikkelutsvinget *y* har positiv verdi, er de forskjøvet i positiv retning. Dvs. mot høyre. Dersom *y* er negativ, er partiklene forskjøvet mot venstre.



Dette viser at vi får maksimal fortetting ved $x = 1{,}00$ cm og $x = 11{,}0$ cm. Her blir det dermed høyest lydtrykk.
I posisjonene $x = 5{,}00$ cm og $x = 16{,}0$ cm er det maksimal spredning mellom partiklene. Her blir derfor lydtrykket minst.

b) Lydtrykket er trykkendringer i forhold til normalt atmosfæretrykk. For å få til dette. må forflytningen til nabopartikler være forskjellig. Matematisk finner vi dette som en endring i *y* med hensyn på posisjonen x, dvs. $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$.
Siden trykket øker når avstanden mellom partiklene blir mindre, må trykket være proporsjonalt med $-\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$.
I tillegg må vi også ta med hvor en faktor som angir «hvor lett» partikkelutsving kan oppstå i materialet, dvs. Bulk Modulus, B.
Altså er det rimelig at $p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$.

c) Partikkelutsvinget er gitt som $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ der $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ og $\omega = 2\pi f$. Leser av

bølgelengden fra grafen: $\lambda = 10{,}0 \text{ cm} = 0{,}100 \text{ m} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{0{,}100 \text{ m}} = 62{,}8 \text{ rad/m}$

Lydfarten i luft ved 20°C: $v = 343$ m/s

Vinkelfrekvensen: $v = \frac{\omega}{k} \Leftrightarrow \omega = vk = 343 \text{ m/s} \cdot 62{,}8 \text{ rad/m} = 21{,}6 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

Frekvensen: $v = \lambda f \Leftrightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{0{,}100 \text{ m}} = 3{,}43 \text{ kHz}$

d) Lydtrykket:

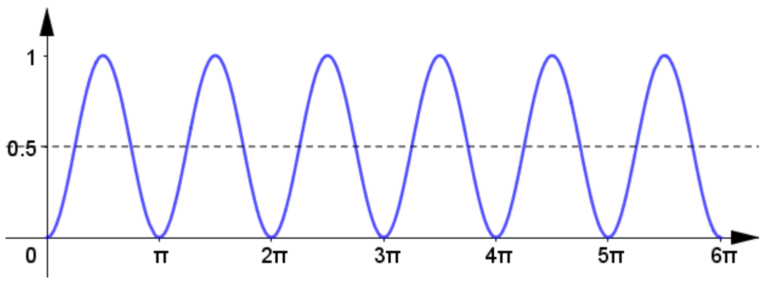
$$p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -BAk(-\sin(kx - \omega t)) = BAk\sin(kx - \omega t)$$

Maksimalt lydtrykk: $p_{maks} = BAk = 1{,}42 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 62{,}8 \text{ rad/m} = 8{,}92 \text{ Pa}$

e) Intensiteten er gitt som $I(x,t) = \frac{P(x,t)_{av}}{A} = \left(p(x,t) \cdot v_y(x,t)\right)_{av}$

$$p(x,t) \cdot v_y(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$
$$= BAk\sin(kx - \omega t) \cdot \left(-A\sin(kx - \omega t) \cdot (-\omega)\right) = BA^2k\omega\sin^2(kx - \omega t)$$

Funksjonen $\sin^2(...)$ svinger mellom ytterpunktene 0 og 1, symmetrisk om 0,5.



Dermed ser vi at den midlere intensiteten blir halvparten av den maksimale verdien.

$$I = \frac{1}{2} I_{maks} = \frac{1}{2} BA^2 k\omega$$

f) Intensiteten i dette tilfellet blir

$$I = \frac{1}{2} BA^2 k\omega = \frac{1}{2} \cdot 1{,}42 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \left(1{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ m}\right)^2 \cdot 62{,}8 \text{ m}^{-1} \cdot 21{,}6 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 96{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

Lydnivået er da $\beta = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{96{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2}{1{,}00 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2} = 110 \text{ dB}$