Institutt for fysikk

LF - Eksamensoppgave
FY6016 Mekaniske bølger og eksperimentelt arbeid

Faglig kontakt under eksamen: Astrid Johansen

Tlf.: 918 22 404

Eksamensdato: 15.12.2021

Eksamenstid (fra-til): kl.09.00 – 12.00

Tillatte hjelpemidler: Alle, men besvarelsen skal være et individuelt arbeid. Nødvendige konstanter og andre faktastørrelser som ikke er oppgitt må kandidaten selv finne fram til.

Annen informasjon: Vurderingskriterier: se s.2

Målform/språk: Bokmål

Antall sider: **4**

Annen informasjon:
Du må samle alle svararkene dine i én fil og laste opp denne. Dersom besvarelsen din består av både word-dokument(er) og håndskreven besvarelse, skriv ut word-dokumentet og skann det sammen med den håndskrevne besvarelsen til én pdf-fil. Dersom du får problemer med dette, kan alle dokumentene sendes på epost til videre@ntnu.no.

Vurderingskriterier

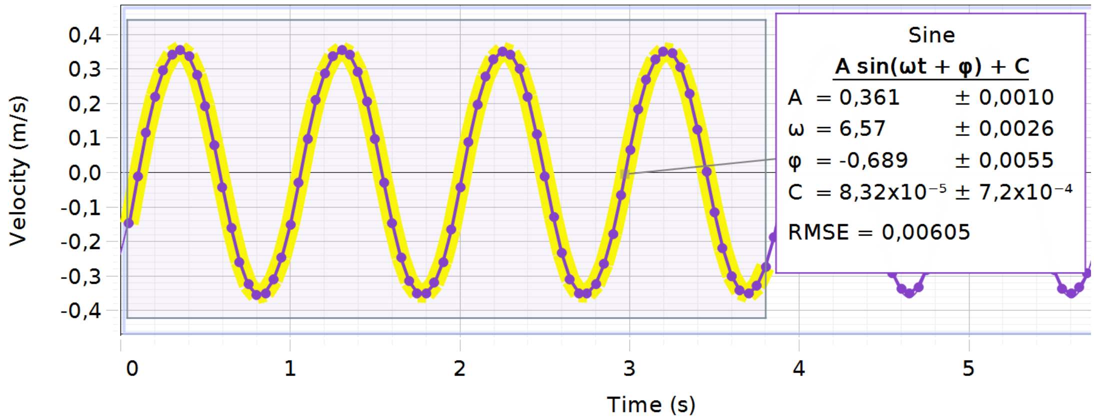
Ved vurderingen vektlegges din evne til å vise **egen** kompetanse ved å

- vise kunnskap om fysiske fenomener og sammenhenger
- begrunne og formidle resonnementer
- gjøre kvalitative vurderinger
- gjøre kvantitative beregninger
- presentere besvarelsen

Prosentene på hver oppgave indikerer hvor mye den teller i det endelige resultatet for hele denne eksamensoppgaven.

Oppgave 1 (Vekt: 40%)

En elastisk pendel er laget ved at et lodd med masse 500±1 g henger i en spiralfjær og svinger vertikalt. Grafen under viser hvordan farten til loddet varierer med tida.



a) *Bruk opplysningene i figuren over, og bestem verdier for amplituden, perioden, vinkelfrekvensen og fjærkonstanten.*

Svar:

Vi ser av figuren over at amplituden A, altså største absoluttverdi for farten, er

$$A = (0{,}361 \pm 0{,}001)\text{m/s}$$

Vi ser også at vinkelfrekvensen er oppgitt fra dataprogrammet som:

$$\omega = (6{,}57 \pm 0{,}0026)\ \text{rad/s}$$

Dette er inkonsekvent bruk av gjeldende siffer siden usikkerheten i 6,57 er større enn den som er oppgitt. Antakelig vil det være mer korrekt å oppgi $\omega = (6{,}570 \pm 0{,}003)\ \text{rad/s}$.

Når vinkelfrekvensen er kjent, kan vi bestemme perioden T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(6{,}570 \pm 0{,}003)\ \text{rad/s}} = (0.9563 \pm 0{,}0004)\ \text{s}$$

Siden $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, kan vi bestemme fjærkonstanten ved $k = m\omega^2$, dvs.

$$k = (0{,}500\ \pm 0{,}001)\ \text{kg} \cdot \left((6{,}570 \pm 0{,}003)\ \text{rad/s}\right)^2 = (21{,}65 \pm 0{,}06)\ \text{N/m}$$

b) *Når loddet henger i ro i fjæra, er posisjonen 29,0 cm over bevegelsessensoren. Bestem funksjonsuttrykket som beskriver hvordan posisjonen til loddet varierer med tida.*

Svar:

Vi har at $v(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ der koeffisientene er gitt over. Siden $v(t) = \frac{dy}{dt}$, vil $y(t)$ kunne bestemmes ved å integrere $v(t)$:

$$y(t) = \int v(t)\, dt = \int A\sin(\omega t + \varphi)\, dt = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$$

Konstanten C angir likevektslinja loddet svinger rundt, og dette vil være posisjonen loddet vil henge i dersom det er i ro. Altså er $C = 0{,}290\ \mathrm{m}$.

Amplituden for $y(t)$: $\quad y_0 = \frac{A}{\omega} = \frac{(0{,}361 \pm 0{,}001)\mathrm{m/s}}{(6{,}570 \pm 0{,}003)\ \mathrm{rad/s}} = (0{,}0549\ \pm 0{,}0002)\ \mathrm{m}$

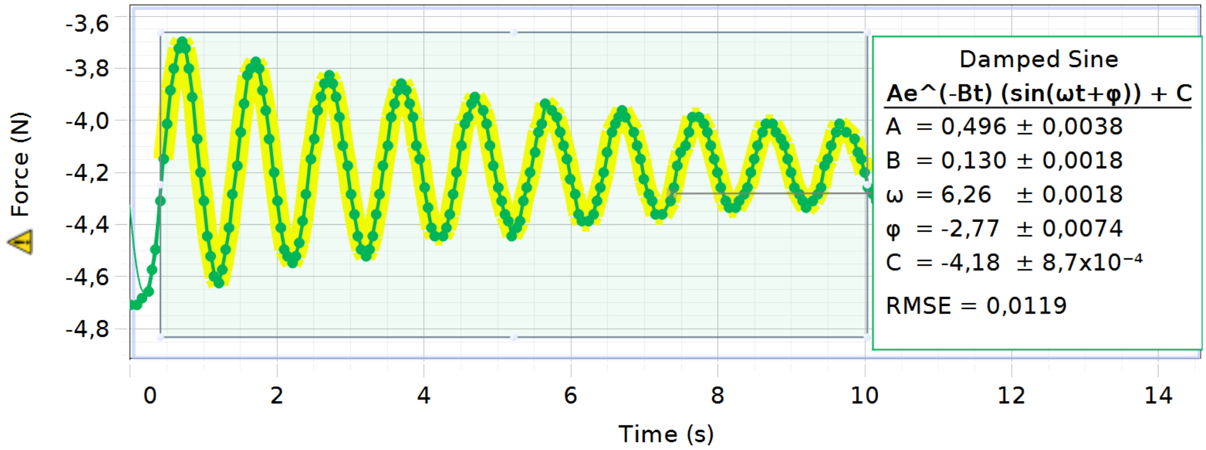
Alternativ med enhet cm: $\quad y_0 = (5{,}49 \pm 0{,}02)\ \mathrm{cm}$

Vi kan oppgi $y(t)$ med negativt fortegn, men kan unngå det ved å endre fasen med π.

Så et funksjonsuttrykk som beskriver svingningene er

$$y(t) = (5{,}49 \pm 0{,}02)\ \mathrm{cm} \cdot \cos[(6{,}570 \pm 0{,}003)\ \mathrm{rad/s} \cdot t + (2{,}453 \pm 0{,}006)\ \mathrm{rad}\,]$$

I et forsøk på lab'en fyller vi et kar med vann, og lar det samme pendelloddet som over gjøre svingninger mens det hele tida er dekket av vann. Vi bruker datalogger med kraftsensor, og får følgende sammenheng mellom kraft og tid



c) Forklar og vurder størrelsene regresjonen oppgir. Hva blir bremsefaktoren? Er resultatene i samsvar med hva som kan forventes eller er det noe du stusser på? Begrunn.

Svar:

A er amplituden dersom faseforskyvningen er 0. Men når vi ser på situasjonen der $t = 0$, ser vi at funksjonsuttrykket blir

Dette ser vi stemmer godt overens med verdien regresjonsgrafen har for $t = 0$

Videre er faktoren B i eksponentialfunksjonen gitt som $B = \frac{b}{2m}$. Den bestemmer hvor raskt svingningene dempes. Her er $B = 0{,}130\ \mathrm{s}^{-1}$, dvs. at bremsefaktoren er

$$b = 2m \cdot B = 1{,}00\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}130\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}130\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Vinkelfrekvensen i disse dempede svingningene er 6,26 rad/s som vi ser er mindre enn for de udempa svingningene. Den teoretiske sammenhengen er

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

der ω' er vinkelfrekvensen for dempet svingning

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ er vinkelfrekvensen for udempet svingning

$\frac{b}{2m} = B$ bestemmer dempingen og er gitt i figuren

Vi får

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - B^2} = \sqrt{(6{,}57\ \mathrm{rad/s})^2 - (0{,}130\ \mathrm{s}^{-1})^2} = 6{,}57\ \mathrm{rad/s}$$

Dette ser vi stemmer dårlig med den oppgitte vinkelfrekvensen for de dempede svingningene: $\omega' = 6{,}26\ \mathrm{rad/s}$.

Faseforskjellen som er oppgitt ser rimelig ut. Dette kan vi se grafisk ved at sinus-funksjonen er forskjøvet med litt mindre enn en halv periode mot høyre. Dette vi matematisk si en faseforskjell på litt mindre enn π (2,77) i negativ retning. I tillegg så vi at verdien for utslaget ved $t = 0$ (der faseforskyvningen inngår) stemmer bra.

Likevektslinja oppgir systemet som *C* = -4,18. Her er det to ting å bemerke:

- Det negative fortegnet har ingen praktisk betydning, det bestemmes av fortegnsvalg på sensoren
- Hvis loddet hadde svingt i luft, burde likevektslinja tilsvare tyngden av loddet dersom det hang i ro, dvs. $G = mg = 0{,}500\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 4{,}9\ \mathrm{N}$. Her ser vi verdien som blir registrert er mindre (i absoluttverdi). Men siden loddet påvirkes av en oppdrift fra vannet, er dette som forventet.

Oppgave 2 (Vekt: 30 %)

En utsvinget for en transversal bølge på en streng kan uttrykkes

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t)$$

a) *Skisser grafer for* $y(x,0)$ *og* $v_y(x,0)$ *der du viser tydelig sammenheng mellom grafene og angitte verdier på aksene.*

Svar:

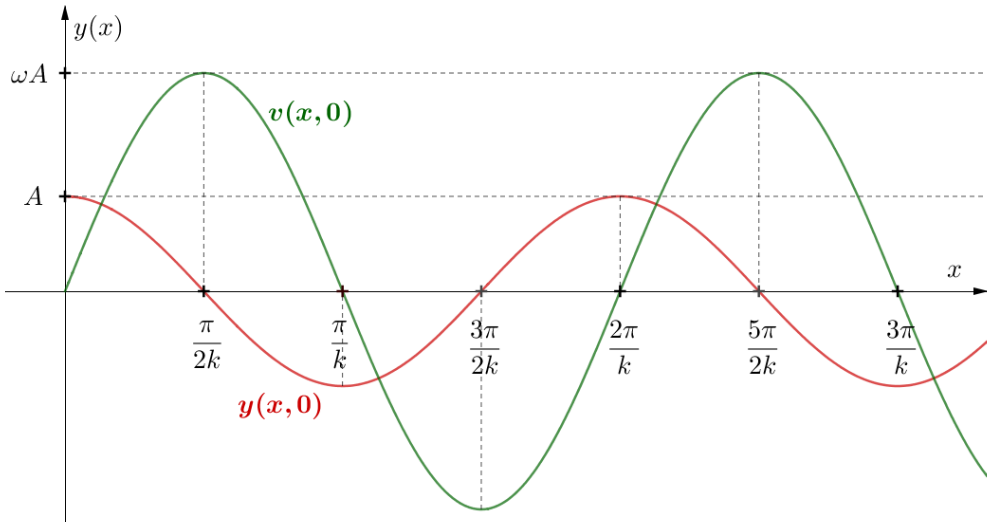
Funksjonsuttrykkene for posisjonen finner vi direkte ved å sette $t = 0$ i det oppgitte funksjonsuttrykket: $y(x,0) = A\cos kx$

For å finne farten ved $t = 0$, må vi først bestemme det generelle uttrykket for farten:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = A\omega \sin{(kx - \omega t)}$$

Dermed får vi at $\qquad v(x,0) = A\omega \sin kx$

Plotter begge grafene i samme koordinatsystem:



Her ser vi at farten er størst når utsvinget på strenge er 0, og vi ser at farten er 0 når utsvinget er maksimalt. For å sjekke om fortegnet på fartsgrafen er riktig, kan vi tenke oss posisjonsgrafen et lite tidsintervall seinere. Da har hele posisjonsgrafen forlyttet seg litt mot høyre. Hvis vi ser på hvordan partiklene må svinge for å være i denne neste posisjonen, ser vi fartsretningen.

En vibrator genererer harmoniske svingninger i posisjonen $x = 0$ på en streng. Frekvensen til svingningene er 40,0 Hz og amplituden er 3,00 cm. Strengen har masse 25,0 g per meter og er strukket med en kraft på 10,0 N.

b) *Gjør nødvendige beregninger og bestem uttrykket for bølgefunksjonen $y(x,t)$ for bølgen på strengen.*

Svar:

Her er amplituden oppgitt: $A = 3{,}00 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$

Vinkelfrekvensen finner vi fra den oppgitte frekvensen: $\qquad \omega = 2\pi f = 80{,}0 \cdot \pi\ \ \mathrm{rad/s}$

Dersom vi vet bølgefarten, finner vi bølgelengden som $\lambda = \frac{v}{f}$

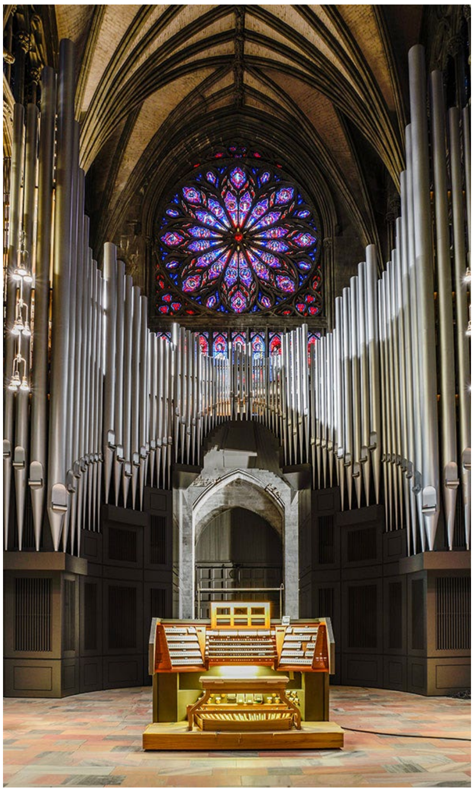
Bølgefarten på strengen er gitt som $\qquad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{10{,}0\ \mathrm{N}}{25{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/m}}} = 20{,}0\ \mathrm{m/s}$

Dermed er bølgelengden $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20{,}0 \text{ m/s}}{40{,}0 \text{ Hz}} = 0{,}500 \text{ m}$

Og funksjonen som beskriver denne bølgen blir

$$y(x,t) = 3{,}00 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \cos(4{,}00\pi \text{ m}^{-1} \cdot x - 80{,}0\pi \text{ rad/s} \cdot t)$$

Oppgave 3 (Vekt: 20 %)



På bildet ved siden av ser du et av orglene i Nidarosdomen. Det er satt sammen av orgelpiper med ulike lengder, og lyden oppstår når det sendes en luftstrøm inn i pipene.

a) Bruk bildet til å gjøre et overslag for å finne den laveste og nest laveste frekvensen orgelet på bildet kan gi (via luftstrømmen gjennom orgelpipene).

Forklar hvordan du tenker og gjør rede for hvilke forutsetninger du legger inn

Svar:

Lavest frekvens ved samme lydfart får vi når bølgelenden er størst mulig. Dvs. vi må se på den lengste orgelpipa. Ut fra størrelsen på orgelkrakken og hvordan størrelsen til en person da bør være, kan det være rimelig å anslå lengden av de lengste pipene til 5,0 m.

Videre vil vi få den laveste frekvensen dersom orgelpipa er lukket. Da vil lengden av pipa tilsvare ¼ bølgelengde, altså får vi $\lambda_1 = 4L = 20 \text{ m}$. Hvis vi antar at lydfarten er 340 m/s, gir det en frekvens for grunntonen på

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{340 \text{ m/s}}{20 \text{ m}} = 17 \text{ Hz}$$

Nedre grense for hørbar lyd er ofte satt til 20 Hz. Her ser vi at vi er under det, men i en orgelkonsert skal du også kjenne lyden vibrere nedover ryggraden, så dette er ikke urimelig.

For den nest laveste frekvensen, vil lengden av orgelpipa tilsvare $\frac{3}{4}\lambda$. Altså får vi bølgelengden $\lambda_2 = \frac{4}{3}L = \frac{1}{3} \cdot \lambda_1$, og frekvensen til første overtone blir

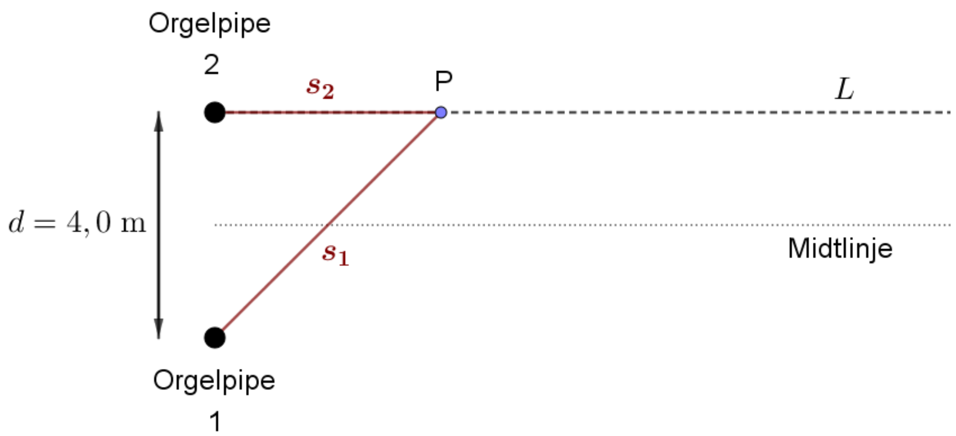
$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{\frac{1}{3} \cdot \lambda_1} = 3 \cdot \frac{v}{\lambda_1} = 3 \cdot f_1 = 3 \cdot 17\ \text{Hz} = 51\ \text{Hz}$$

To identiske orgelpiper er plassert 4,0 m fra hverandre og gir ut samme frekvens, 110 Hz. Samtidig beveger en person seg vinkelrett ut fra den ene pipa, hele tiden i avstand 2,0 m fra midtlinja mellom de to orgelpipene.

a) *Tegn figur, og undersøk om personen vil passere punkter med konstruktiv eller destruktiv interferens. Bestem i så fall hvor disse punktene vil være.*

Forklar hvordan du tenker og vis beregninger.

Svar:



Personen er angitt med P, og beveger seg fra orgelpipe 2 bortover linja *L*.

s_1 er avstanden fra orgelpipe 1 til P og s_2 er avstanden fra orgelpipe 2 til P.

Da vet vi at vi får konstruktiv interferens dersom $s_1 - s_2 = \pm n\lambda\,,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$

og destruktiv interferens dersom $s_1 - s_2 = \left(n \pm \frac{1}{2}\right)\lambda\,,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Siden s_1 hele tida er lengre enn s_2, vil vi bare få positive differanser.

Vi ser at vi har behov for å vite bølgelengden: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\ \text{m/s}}{110\ \text{Hz}} = 3{,}09\ \text{m}$

$$s_1 - s_2 = \sqrt{x^2 + (4{,}0\ \text{m})^2} - x$$

For konstruktiv interferens:

$$\sqrt{x^2 + (4{,}0\ \mathrm{m})^2} - x = n\lambda \iff \sqrt{x^2 + (4{,}0\ \mathrm{m})^2} = x + n\lambda$$

$$\Rightarrow\ x^2 + (4{,}0\ \mathrm{m})^2 = (x + n\lambda)^2 = x^2 + 2x \cdot n\lambda + (n\lambda)^2$$

Her rydder vi opp og finner et uttrykk for *x*

$$2x \cdot n\lambda = (4{,}0\ \mathrm{m})^2 - (n\lambda)^2 \iff x = \frac{8{,}0\ \mathrm{m}^2}{n\lambda} - \frac{n\lambda}{2}$$

Da er det bare å prøve med ulike verdier for *n*:

$n = 1$: $\quad x = \frac{8{,}0\ \mathrm{m}^2}{1 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}} - \frac{1 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}}{2} = 1{,}04\ \mathrm{m}$

$n = 2$: $\quad x = \frac{8{,}0\ \mathrm{m}^2}{2 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}} - \frac{2 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}}{2} = -1{,}80\ \mathrm{m}$

Ikke aktuelt med negative *x*-verdier i dette tilfellet.

For å sjekke destruktiv interferens går vi fram på samme måte. Differansen kan uttrykkes på samme måte, men nå skal den bli et odde antall halve bølgelengder:

$$\sqrt{x^2 + (4{,}0\ \mathrm{m})^2} - x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \iff \sqrt{x^2 + (4{,}0\ \mathrm{m})^2} = x + \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow\ x^2 + (4{,}0\ \mathrm{m})^2 = \left(x + \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda\right)^2 = x^2 + x \cdot (2n+1) \cdot \lambda + \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \lambda\right)^2$$

Rydder opp og finner et uttrykk for *x*

$$x \cdot (2n+1) \cdot \lambda = (4{,}0\ \mathrm{m})^2 - \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \lambda\right)^2 \iff x = \frac{16{,}0\ \mathrm{m}^2}{(2n+1) \cdot \lambda} - \frac{(2n+1) \cdot \lambda}{4}$$

$n = 0$: $\quad x = \frac{16{,}0\ \mathrm{m}^2}{1 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}} - \frac{1 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}}{4} = 4{,}40\ \mathrm{m}$

$n = 1$: $\quad x = \frac{16{,}0\ \mathrm{m}^2}{3 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}} - \frac{3 \cdot 3{,}09\ \mathrm{m}}{4} = -0{,}593\ \mathrm{m}$

Ikke aktuelt med negative *x*-verdier i dette tilfellet.

Personen vil dermed først registrere konstruktiv interferens 1,04 m unna orgelpipa, og deretter destruktiv interferens når avstanden er 4,40 m fra orgelpipa. Deretter vil det ikke være noen flere tilfeller av konstruktiv eller destruktiv interferens.