Løsningsforslag FY6017 Elektromagnetisme Eksamen 11. mai 2022

1) **a**. Feltbidraget fra $2q$ peker mot høyre (positiv retning) mens bidragene fra de to negative $-q$ peker mot venstre. Dermed:

$$E(2d) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(3d)^2} = -\frac{11q}{18 \cdot 4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

som med oppgitte tallverdier for q og d gir feltstyrke 17.6 GV/m. Feltet peker mot venstre. De to negative ladningene "vinner" med andre ord over den ene positive.
b. Potensialbidraget fra $2q$ er positivt og fra de to $-q$ negativt.

$$V(2d) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3d} = -\frac{q}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0 d}$$

som med oppgitte tallverdier for q og d gir $V(2d) = -1.12$ V.

---

2) Potensialet V i avstand r fra en punktladning e er $V = e/4\pi\varepsilon_0 r$. Kuleflaten med potensial 3.0 nV har dermed radius $r = e/4\pi\varepsilon V = 0.48$ m $= 48$ cm.

---

3) Feltstyrke i de to luftfylte volumene med tykkelse $d/3$ er $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0 A$. Feltstyrken inni metallskiva er null. Potensialforskjellen mellom de to ladde planene er da $V = E \cdot 2d/3 = 2Qd/3\varepsilon_0\pi r^2$, som med $Q = 20$ nC, $d = 3.0$ mm og $r = 10$ cm blir $V = 144$ V.

---

4) **a**. Seriekoblingen av de to helt til høyre har kapasitans $(1/C + 1/C)^{-1} = C/2$. Denne er parallellkoblet med den i midten, slik at disse tre har kapasitans $C + C/2 = 3C/2$. Denne er igjen seriekoblet med de to siste, slik at total kapasitans blir

$$C_{\mathrm{TOT}} = (1/C + 1/C + 2/3C)^{-1} = 3C/8 = 30 \text{ nF}.$$

b. Hver av de tre seriekoblede "enhetene" C, $3C/2$ og C må ha like mye ladning, gitt ved $Q = V_0 C_{\mathrm{TOT}} = 80 \cdot 30 \cdot 10^{-9}$ C $= 2.4$ μC. Denne fordeler seg med 2/3 på C midt i figuren og 1/3 på seriekoblingen helt til høyre, dvs ladning 1.6 μC på C i midten. Og dermed spenning $V = (1.6 \cdot 10^{-6}/80 \cdot 10^{-9})$ V $= 20$ V over kondensatoren midt i figuren.

---

5) **a**. Seriekoblingen av de to lengst til høyre har motstand $2R$. Parallellkoblingen av denne med R i midten har motstand $(1/R + 1/2R)^{-1} = 2R/3$. Seriekoblingen av denne med de to til venstre resulterer i en total motstand $R_{\mathrm{TOT}} = 8R/3 = 80\ \Omega$.
b. Total strøm i kretsen blir $I = V_0/R_{\mathrm{TOT}} = (30/80)$ A. Samlet spenningsfall over de to motstandene til venstre i figuren blir da $2 \cdot (30/80) \cdot 30$ V $= 22.5$ V. Da gjenstår 7.5 V over motstanden midt i figuren.

---

6) **a**. $I = V_0/3R = (30/120)\ \mu$A $= 0.25\ \mu$A.
b. Samme spenning Q/C over kondensatoren som over den parallellkoblede motstanden R, slik at $Q/C = V_0/3$, dvs $Q = V_0 C/3 = 10\ \mu$C.
c. Umiddelbart etter at spenningskilden er koblet til har kondensatoren ingen ladning, og dermed heller ingen spenning over seg. Da har den parallellkoblede motstanden heller ingen spenning over seg, og ifølge Ohms lov heller ingen strøm gjennom seg. Med andre ord, $I_2 = 0$. Den påtrykte spenningen V_0 må da ifølge Kirchhoffs spenningsregel finnes igjen som spenningsfall over de to andre motstandene, med total motstand $2R$. Ohms lov gir nå $I = V_0/2R = 0.38\ \mu$A. Denne strømmen må i sin helhet gå inn på kondensatoren, dvs $I_1 = I = 0.38\ \mu$A.

7) **a**. $I(t) = dQ/dt = (-Q_0/RC)\ \exp(-t/RC)$, slik at $|I(0)| = Q_0/RC = 0.0125$ A $\simeq 13$ mA.
b. Et minutt er lang tid sammenlignet med kretsens tidskonstant $RC = 6.4$ s, slik at all opprinnelig energi lagret i kondensatoren $Q_0^2/2C$ er omdannet til varme. Dette er 40 J.

---

8) **a)**. Energibevarelse ved akselerasjon gjennom potensialforskjell V gir $eV = mv^2/2$, dvs hastighet $v = \sqrt{2eV/m}$. I magnetfeltet gir den magnetiske kraften en sentripetalakselerasjon v^2/r, dvs $evB = mv^2/r$. Radien i sirkelbanen blir nå $r = mv/eB = (m/eB)\sqrt{2eV/m} = (1/B)\sqrt{2mV/e}$.
b). Avstanden mellom treffpunktene tilsvarer to ganger forskjellen i baneradius. Dermed:

$$d = 2\Delta r = (1/B)\sqrt{2V/e}(\sqrt{81u} - \sqrt{79u}) = 15 \text{ mm}$$

---

9) Her er farten i xy-planet $v = \sqrt{5}v_0$ slik at radien i elektronets sirkelbane er $r = mv/eB_0 = 3.4$ mm.

---

10) En slik sekskant består av 6 likesidete trekanter med sidekanter $a = 12$ cm og areal $A_1 = \sqrt{3}a^2/4$. Magnetisk dipolmoment blir da $m = IA = 6IA_1 = 3\sqrt{3}Ia^2/2 = 0.45$ Am^2.

---

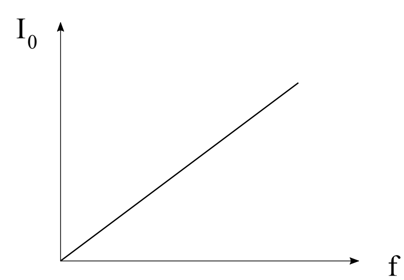
11) Siden $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ og $f_0 = \omega_0/2\pi$, er $C = 1/4\pi^2 L f_0^2 = 5.4\ \mu$F.

---

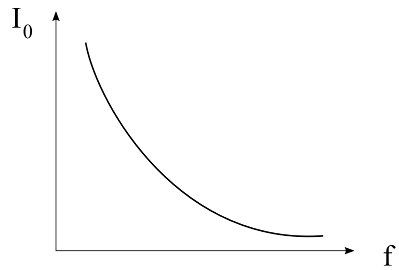
12) Svingekretsens Q-faktor er $Q = \omega_0/\Delta\omega = f_0/\Delta f = \sqrt{L/C}/R$ og resonansfrekvensen er $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$. Her kan vi velge verdi fritt for en av de tre kretskomponentene. Med gitte verdier for Q og f_0 blir de to andre kretskomponentene fastlagt. En enkel løsning kan for eksempel være å velge samme tallverdi for L og C i standard SI-enheter. Vi har $LC = (4\pi^2 \cdot 98000)^{-1}$ s^2 slik at $L = 1.624\,\mu$H og $C = 1.624\,\mu$F. Da må vi velge $R = \sqrt{L/C}/Q = 10^{-3}\,\Omega = 1.0$ mΩ.

---

13) **a**. Kirchhoffs spenningsregel gir $Q = V_0 C \sin\omega t$, og dermed $I = V_0 C\omega\cos\omega t$. Strømamplituden er da $I_0 = 2\pi V_0 C f = 60$ mA.
b. Funksjonen $I_0(f)$ er en rett linje:



14) **a**. Kircchoffs spenningsregel gir $dI/dt = (V_0/L)\cos\omega t$, og dermed $I = (V_0/\omega L)\sin\omega t$. Strømamplituden er da $I_0 = V_0/2\pi f L = 0.26$ A.
b. Funksjonen $I_0(f)$ avtar som $1/f$:



15)
a. Kondensatorladningen er $Q(t) = Q_0\sin(\omega t + \phi)$. Da er $I(t) = \omega Q_0\cos(\omega t + \phi)$ og $dI/dt = -\omega^2 Q_0\sin(\omega t + \phi)$. Når påtrykt spenning svinger med kretsens resonansfrekvens, er amplituden til kondensatorladningen (se forelesningsnotater) $Q_0 = V_0\sqrt{LC}/R$. Spenningen over hhv C, R og L har da amplituder $V_{C0} = Q_0/C = V_0\sqrt{L/C}/R = 4.5$ V, $V_{R0} = R\omega_0 Q_0 = V_0 = 1.0$ V og $V_{L0} = L\omega_0^2 Q_0 = V_0\sqrt{L/C}/R = 4.5$ V.
b. Ved et gitt tidspunkt er summen av spenningsfallene over de tre kretskomponentene alltid lik den påtrykte spenningen $V_0\sin\omega_0 t$. Men siden det er faseforskjeller mellom spenningen over de tre komponentene, er det ingenting i veien for at de enkelte amplitudene kan overstige V_0. (På resonans vil spenningene over C og L svinge i motfase. Dermed blir amplituden V_{R0} lik V_0.)