**Oppgave 1. Flervalgsoppgaver. (Poeng: 2.5 × 8 = 20)**

*a*) Hva er forventningsverdien av posisjonen, $\langle x \rangle$, til en partikkel i grunntilstanden i en endimensjonal potensialboks mellom $x = 0$ og $x = L$? (Dvs $V(x) = 0$ for $0 < x < L$ og $V(x) = \infty$ ellers.)

A $0$ B $L/4$ C $L/2$ D $3L/4$

*b*) Hva er kommutatoren $[z, \widehat{p}_x]$?

A $0$ B $i\hbar$ C $\hbar/i$ D $i$

*c*) Hva er sannsynlighetsstrømmen $j$ for tilstanden $\Psi(x,t) = \exp(ikx)\ \exp(-iEt/\hbar)$?

A $0$ B $k$ C $\hbar k$ D $\hbar k/m$

*d*) Hva er egenverdien til operatoren

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

når partikkelen er i tilstanden $\psi(x) = A\ \exp(-m\omega x^2/2\hbar)$?

A $0$ B $\frac{1}{2}\hbar\omega$ C $\frac{3}{2}\hbar\omega$ D $\frac{5}{2}\hbar\omega$

*e*) Til hvilke operatorer er $\Psi(x,z,t) = \sin(k_x x + k_z z)\ \exp(-i\omega t)$ en egenfunksjon?

A Ingen B $\widehat{p}_x$, $\widehat{p}_z$ og $\widehat{H}$ C $\widehat{p}_x$ og $\widehat{p}_z$ D $\widehat{H}$

*f*) Vibrasjoner i jodmolekylet $I_2$ kan betraktes som en enkel endimensjonal harmonisk oscillator, med energinivåer $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$, og egenfrekvens $\nu = \omega/2\pi \simeq 6.2 \cdot 10^{12}$ Hz. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere $I_2$ fra laveste til nest laveste vibrasjonsnivå?

A 0.03 K B 3 K C 300 K D $3 \cdot 10^4$ K

*g*) Rotasjonsbevegelsen til jodmolekylet $I_2$ kan betraktes som en stiv rotator, med energinivåer $E_l = l(l+1)\hbar^2/m_{\mathrm{I}}d^2$ $(l = 0, 1, 2\ldots)$, der atommassen er $m_{\mathrm{I}} = 126.9u$ og bindingslengden er $d = 270$ pm. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere $I_2$ fra laveste til nest laveste rotasjonsnivå?

A 0.1 K B 10 K C 1000 K D $10^5$ K

*h*) Energinivåene for en partikkel med masse $m$ i en kubisk boks med sidekanter $L$ er

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right),$$

med positive heltallige kvantetall $n_x, n_y, n_z$. Hva er degenerasjonsgraden til energinivået $7\hbar^2\pi^2/mL^2$?

A 2 B 3 C 6 D 18

**Oppgave 2. Excimer laser (Poeng: 3 + 3 + 3 + 6 = 15)**

Til øyeoperasjoner brukes gjerne en såkalt excimer laser, med bølgelengder i det ultrafiolette området. Et eksempel er argonfluorid, som emitterer fotoner med bølgelengde 193 nm ved deeksitasjon av et ustabilt "ArF–molekyl" i reaksjonen 2 ArF $\to$ 2 Ar + $F_2$.

*a*) Bestem fotonenes energi i en slik laser. Oppgi svaret i enheten eV.

*b*) Anta at en slik laser sender ut pulser med varighet 20 ns. Hvor lang (dvs hvor mange meter) er en laserpuls med denne varigheten (gitt at den får forplante seg rett fram uten hindringer)?

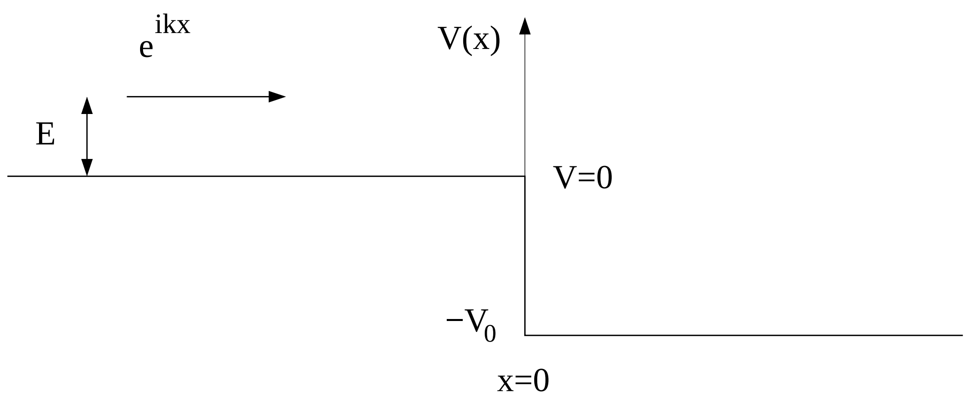
*c*) Begynnelse og slutt i en slik laserpuls er ikke skarpt definert. Intensiteten (dvs energien pr tids– og flateenhet) som ankommer et gitt sted (f.eks på hornhinna på øyet) kan med brukbar tilnærmelse beskrives med en gaussfunksjon,

$$I(t) = I_0\, e^{-t^2/\tau^2},$$

der $t = 0$ representerer tidspunktet for maksimal intensitet $I_0$ inn på øyet. Begrunn at det er rimelig å si at varigheten av en slik puls er (ca) $4\tau$.

*d*) Anta at hver slik puls, med $\tau = 5$ ns, gir en energi pr flateenhet $F = 30$ kJ/m$^2$ inn på øyet. Bruk dette til å beregne størrelsen $I_0$. Bruk enheten W/m$^2$. Tips: Mellom $t$ og $t + dt$ ankommer en energi pr flateenhet $dF = I(t)\, dt$. Oppgitt: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$.

**Oppgave 3. Potensialstup (Poeng: 5 + 5 + 5 + 5 = 20)**




Vi ser på en partikkel med masse $m$ i et endimensjonalt system med potensial (potensiell energi) $V(x) = 0$ for $x < 0$ og $V(x) = -V_0$ for $x > 0$. (Med $V_0 > 0$.) Anta at partikkelen har positiv energi, $E > 0$. Vi betrakter en situasjon der partikkelen kommer inn fra venstre, slik at den kan beskrives med en plan bølge $\psi_i(x) = \exp(ikx)$. Ved "potensialstupet" i $x = 0$ blir partikkelen enten reflektert eller transmittert, og dette beskriver vi med henholdsvis $\psi_r(x) = r\, \exp(-ikx)$ og $\psi_t(x) = t\, \exp(iqx)$. Den fullstendige bølgefunksjonen $\psi(x)$ blir følgelig $\psi_i(x) + \psi_r(x)$ i området $x < 0$ og $\psi_t(x)$ i området $x > 0$.

*a*) Sett de oppgitte løsningene inn i TUSL og finn på den måten $k$ og $q$ uttrykt ved oppgitte størrelser (samt $\hbar$).

*b*) Bruk kontinuitet av $\psi(x)$ og dens deriverte, $d\psi(x)/dx$, til å bestemme refleksjonsamplituden $r$ og transmisjonsamplituden $t$. Uttrykk $r$ og $t$ ved bølgetallene $k$ og $q$.

*c*) Vis at sannsynligheten $R = |r|^2$ for at partikkelen reflekteres kan skrives på formen

$$R = \left( \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E + V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0}} \right)^2 .$$

Hvorfor er uttrykket for $R$ fornuftig i grensen $|V_0| \to 0$.

*d*) Kommenter hvordan resultatet for $R$ skiller seg fra det klassiske tilfellet, dvs dersom den innkommende partikkelens oppførsel i det samme potensialet hadde vært bestemt av klassisk fysikk. Kommenter spesielt grensetilfellet $|V_0| \to \infty$.

## Oppgave 4. Energibånd og materialegenskaper (Poeng: 5 + 5 + 5 = 15)

Bruk gjerne både tekst og figur(er) til å besvare denne oppgaven.

*a*) Ta utgangspunkt i en krystalls valensbånd (med øvre energi $E_V$), ledningsbånd (med nedre energi $E_C > E_V$, dvs de to båndene overlapper ikke), og kjemisk potensial (Ferminivå) $\mu$, og forklar hvordan disse tre energistørrelsene avgjør om krystallen er et metall, en isolator eller en halvleder.

*b*) Forklar hvordan doping (forurensing) av en halvlederkrystall påvirker materialets elektriske ledningsevne. Bruk som eksempel en silisiumkrystall (Si; 4 elektroner i ytterste skall) som dopes ved at en liten andel av Si–atomene erstattes av fosfor (P; 5 elektroner i ytterste skall).

*c*) Skisser hvordan $E_C$, $E_V$ og $\mu$ varierer med posisjonen over en *pn*–overgang i likevekt (dvs når det kjemiske potensialet $\mu$ er konstant i hele systemet). Bruk figuren til å gi en kort, kvalitativ forklaring på hvorfor *pn*–overgangen er en *likeretter* (dvs at den leder strøm godt den ene veien og dårlig den andre veien).

**FORMLER OG UTTRYKK.**

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

- Plancks strålingslov ($I(\nu, T)$ = utstrålt energi pr tids-, flate- og frekvensenhet):

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2\left(e^{h\nu/k_BT} - 1\right)}$$

- Fotoelektrisk effekt:

$$U = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: $E$, $\boldsymbol{p}$, $E_k$ og $m$ bevart.
- Uelastisk prosess: $E$ og $\boldsymbol{p}$ bevart.
- Bølger:

$$c = \lambda\nu$$

- de Broglie:

$$\lambda = h/p \ , \ \ \nu = E/h$$

- Schrödingerligningen (SL):

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi$$

- Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL):

$$\widehat{H}\psi = E\psi$$

- Operatorer:
$$\widehat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \widehat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad , \quad f(p) \to f(\widehat{p})$$
- Heisenbergs uskarphetsprinsipp:
$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\widehat{x},\widehat{p}]\rangle\right|$$
- Kommutator:
$$[\widehat{x},\widehat{p}] = \widehat{x}\widehat{p} - \widehat{p}\widehat{x}$$
- Stasjonær tilstand:
$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$
- Forventningsverdier:
$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx \quad , \quad \langle p_x \rangle = \int \Psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi dx \quad , \quad \langle F \rangle = \int \Psi^* \widehat{F} \Psi d\tau$$
- Bølgepakke:
$$\Psi(x,t) = \sum_j c_j \psi_j(x) e^{-iE_j t/\hbar}$$
- Grensebetingelser:
$\psi(x)$ kontinuerlig overalt, $d\psi/dx$ diskontinuerlig kun ved $\infty$ sprang i $V(x)$
- Sannsynlighetsstrøm:
$$j = \mathrm{Re}\left[\Psi^* \left(\frac{\hbar}{mi}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi\right]$$
- Usikkerhet:
$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad , \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$
- Ehrenfests teorem:
$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{r} \rangle = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \quad , \quad \frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{p} \rangle = -\langle \nabla V \rangle$$
- Harmonisk oscillator:
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Fundamentale konstanter:

$$
\begin{aligned}
k_B &= 1.381 \cdot 10^{-23}\ \text{J/K} \\
N_A &= 6.022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \\
\hbar &= h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \\
e &= 1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \\
m_e &= 9.109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \\
m_p &= 1.673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \\
m_n &= 1.675 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \\
u &= 1.661 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \\
c &= 2.998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \\
\alpha &= e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/137.0 \\
a_0 &= 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/e^2 m_e = 0.5292\ \text{Å} \\
\mu_B &= e\hbar/2m_e = 9.274 \cdot 10^{-24}\ \text{J/T} \\
\mu_N &= e\hbar/2m_p = 5.051 \cdot 10^{-27}\ \text{J/T} \\
R_\infty &= \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 = 13.61\ \text{eV}
\end{aligned}
$$

Omregningsfaktorer:

$$
\begin{aligned}
1\ \text{eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \\
1\ \text{Å} &= 0.1\ \text{nm} = 10^{-10}\ \text{m} \\
1\ \text{T} &= 10^4\ \text{G (gauss)} \\
k_B T &\simeq \frac{1}{40}\ \text{eV ved } T = 300\ \text{K}
\end{aligned}
$$