Løsningsforslag
FY6019 Moderne fysikk kl 09.00 - 14.00 fredag 12. juni 2015

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver. (Poeng: 2.5 $\times$ 8 = 20)

a) Hva er forventningsverdien av posisjonen, $\langle x \rangle$, til en partikkel i grunntilstanden i en endimensjonal potensialboks mellom $x = 0$ og $x = L$? (Dvs $V(x) = 0$ for $0 < x < L$ og $V(x) = \infty$ ellers.)

A $\quad 0$ B $\quad L/4$ C $\quad L/2$ D $\quad 3L/4$

Potensialet $V(x)$ er symmetrisk omkring $x = L/2$; da er $\langle x \rangle = L/2$ for alle stasjonære tilstander, inklusive grunntilstanden. **C**.

b) Hva er kommutatoren $[z, \widehat{p}_x]$?

A $\quad 0$ B $\quad i\hbar$ C $\quad \hbar/i$ D $\quad i$

Operatoren for x–komponenten av impulsen inneholder derivasjon mhp x og kommuterer dermed med z. **A**.

c) Hva er sannsynlighetsstrømmen j for tilstanden $\Psi(x,t) = \exp(ikx)\ \exp(-iEt/\hbar)$?

A $\quad 0$ B $\quad k$ C $\quad \hbar k$ D $\quad \hbar k/m$

Sammenligning av j fra formelvedlegget med svaralternativene gir vel umiddelbart $j = \hbar k/m$, av dimensjonsmessige årsaker. Med utregning:

$$\begin{aligned} j &= \mathrm{Re}\left[e^{-ikx}\frac{\hbar}{mi}\cdot ike^{ikx}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{\hbar k}{m}\right] \\ &= \frac{\hbar k}{m}. \end{aligned}$$

Siden derivasjon mhp x ikke berører den tidsavhengige faktoren, vil denne kansellere i produktet $\Psi^* \cdot \Psi$. **D**.

d) Hva er egenverdien til operatoren

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

når partikkelen er i tilstanden $\psi(x) = A\ \exp(-m\omega x^2/2\hbar)$?

A $\quad 0$ B $\quad \frac{1}{2}\hbar\omega$ C $\quad \frac{3}{2}\hbar\omega$ D $\quad \frac{5}{2}\hbar\omega$

Den gitte tilstanden er en grunntilstand (ingen nullpunkter), og $\widehat{H}$ er Hamiltonoperatoren til en enkel endimensjonal harmonisk oscillator. Følgelig er energien $\hbar\omega/2$. **B**.

e) Til hvilke operatorer er $\Psi(x,z,t) = \sin(k_x x + k_z z)\ \exp(-i\omega t)$ en egenfunksjon?

A Ingen B $\widehat{p}_x$, $\widehat{p}_z$ og $\widehat{H}$ C $\widehat{p}_x$ og $\widehat{p}_z$ D $\widehat{H}$

Operatoren $\widehat{H} = \widehat{K} + V$ inneholder dobbel derivasjon mhp x og vil bringe sinus tilbake til sinus. Operatorene til impulskomponentene inneholder bare en gangs derivasjon og vil gjøre om sinus til cosinus. Følgelig er den gitte Ψ bare egenfunksjon til $\widehat{H}$. **D**.

f) Vibrasjoner i jodmolekylet I_2 kan betraktes som en enkel endimensjonal harmonisk oscillator, med energinivåer $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, og egenfrekvens $\nu = \omega/2\pi \simeq 6.2 \cdot 10^{12}$ Hz. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere I_2 fra laveste til nest laveste vibrasjonsnivå?

A 0.03 K B 3 K C 300 K D $3 \cdot 10^4$ K

$T \sim \hbar\omega/k_B = 1.055 \cdot 10^{-34} \cdot 2\pi \cdot 6.2 \cdot 10^{12}/1.381 \cdot 10^{-23}$ K $= 298$ K $\simeq 300$ K. **C**.

g) Rotasjonsbevegelsen til jodmolekylet I_2 kan betraktes som en stiv rotator, med energinivåer $E_l = l(l + 1)\hbar^2/m_I d^2$ $(l = 0, 1, 2 \ldots)$, der atommassen er $m_I = 126.9u$ og bindingslengden er $d = 270$ pm. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere I_2 fra laveste til nest laveste rotasjonsnivå?

A 0.1 K B 10 K C 1000 K D 10^5 K

$T \sim 1 \cdot 2 \cdot \hbar^2/m_I d^2 k_B = 2 \cdot (1.055 \cdot 10^{-34})^2/126.9 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27} \cdot (270 \cdot 10^{-12})^2 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23}$ K $\simeq 0.1$ K. **A**.

h) Energinivåene for en partikkel med masse m i en kubisk boks med sidekanter L er

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right),$$

med positive heltallige kvantetall n_x, n_y, n_z. Hva er degenerasjonsgraden til energinivået $7\hbar^2\pi^2/mL^2$?

A 2 B 3 C 6 D 18

Mulighetene for de 3 kvantetallene er (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) og (3,2,1), i alt 6. **C**.

<u>Oppgave 2. Excimer laser</u> (Poeng: 3 + 3 + 3 + 6 = 15)

Til øyeoperasjoner brukes gjerne en såkalt excimer laser, med bølgelengder i det ultrafiolette området. Et eksempel er argonfluorid, som emitterer fotoner med bølgelengde 193 nm ved deeksitasjon av et ustabilt "ArF–molekyl" i reaksjonen 2 ArF $\rightarrow$ 2 Ar + F_2.

a) Bestem fotonenes energi i en slik laser. Oppgi svaret i enheten eV.

$E = h\nu = 2\pi\hbar c/\lambda$ som med tallverdier innsatt gir $E = 1.03 \cdot 10^{-18}$ J $= 6.43$ eV.

b) Anta at en slik laser sender ut pulser med varighet 20 ns. Hvor lang (dvs hvor mange meter) er en laserpuls med denne varigheten (gitt at den får forplante seg rett fram uten hindringer)?

$l = ct = 2.998 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-9}$ m $\simeq 6.0$ m.

c) Begynnelse og slutt i en slik laserpuls er ikke skarpt definert. Intensiteten (dvs energien pr tids– og flateenhet) som ankommer et gitt sted (f.eks på hornhinna på øyet) kan med brukbar tilnærmelse beskrives med en gaussfunksjon,

$$I(t) = I_0\, e^{-t^2/\tau^2},$$

der $t = 0$ representerer tidspunktet for maksimal intensitet I_0 inn på øyet. Begrunn at det er rimelig å si at varigheten av en slik puls er (ca) 4τ.

Siden $I(\pm 2\tau) = I_0\, e^{-4} \simeq 0.02\, I_0$, vil mesteparten av pulsens energi ankomme i tidsrommet mellom $t = -2\tau$ og $t = +2\tau$, dvs varighet ca 4τ.

d) Anta at hver slik puls, med $\tau = 5$ ns, gir en energi pr flateenhet $F = 30$ kJ/m^2 inn på øyet. Bruk dette til å beregne størrelsen I_0. Bruk enheten W/m^2. Tips: Mellom t og $t + dt$ ankommer en energi pr flateenhet $dF = I(t)\, dt$. Oppgitt: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$.

Vi har

$$F = \int dF = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)\, dt = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/\tau^2}\, dt.$$

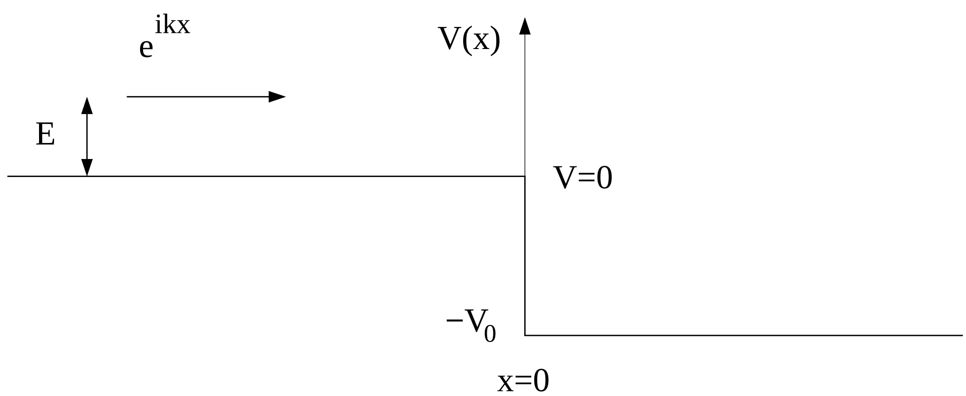
Substitusjonen $x = t/\tau$ gir $dt = \tau dx$ og

$$F = I_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = I_0 \tau \sqrt{\pi}.$$

Dermed:

$$I_0 = \frac{F}{\tau\sqrt{\pi}} = \frac{30 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{\pi}} \simeq 3.4 \cdot 10^{12}\, \mathrm{W/m^2}.$$

Oppgave 3. Potensialstup (Poeng: 5 + 5 + 5 + 5 = 20)



Vi ser på en partikkel med masse m i et endimensjonalt system med potensial (potensiell energi) $V(x) = 0$ for $x < 0$ og $V(x) = -V_0$ for $x > 0$. (Med $V_0 > 0$.) Anta at partikkelen har positiv energi, $E > 0$. Vi betrakter en situasjon der partikkelen kommer inn fra venstre, slik at den kan beskrives med en plan bølge $\psi_i(x) = \exp(ikx)$. Ved "potensialstupet" i $x = 0$ blir partikkelen enten reflektert eller transmittert, og dette beskriver vi med henholdsvis $\psi_r(x) = r\, \exp(-ikx)$ og $\psi_t(x) = t\, \exp(iqx)$. Den fullstendige bølgefunksjonen

$\psi(x)$ blir følgelig $\psi_i(x) + \psi_r(x)$ i området $x < 0$ og $\psi_t(x)$ i området $x > 0$.

a) Sett de oppgitte løsningene inn i TUSL og finn på den måten k og q uttrykt ved oppgitte størrelser (samt $\hbar$).

I området $x < 0$ er $V(x) = 0$, og innsetting av $\psi_i + \psi_r$ i TUSL gir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{ikx} + re^{-ikx}\right) = E\left(e^{ikx} + re^{-ikx}\right),$$

dvs

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(e^{ikx} + re^{-ikx}\right) = E\left(e^{ikx} + re^{-ikx}\right).$$

Følgelig er $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

I området $x > 0$ er $V(x) = -V_0$, og innsetting av ψ_t i TUSL gir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(te^{iqx}\right) = (E + V_0)\left(te^{iqx}\right),$$

dvs

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(te^{iqx}\right) = (E + V_0)\left(te^{iqx}\right).$$

Følgelig er $q = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$.

b) Bruk kontinuitet av $\psi(x)$ og dens deriverte, $d\psi(x)/dx$, til å bestemme refleksjonsamplituden r og transmisjonsamplituden t. Uttrykk r og t ved bølgetallene k og q.

Kontinuerlig $\psi(x)$ i $x = 0$ gir

$$1 + r = t.$$

Kontinuerlig $d\psi/dx$ i $x = 0$ gir

$$ik - ikr = iqt.$$

Eliminasjon av t gjøres f.eks ved å gange ligningen $1 + r = t$ med q, dividere ligningen $ik(1 - r) = iqt$ med i og trekke den ene av disse fra den andre. Da står vi igjen med

$$q(1 + r) - k(1 - r) = 0$$

som gir

$$r = \frac{k - q}{k + q}.$$

Som innsatt i ligningen $1 + r = t$ gir

$$t = 1 + \frac{k - q}{k + q} = \frac{2k}{k + q}.$$

c) Vis at sannsynligheten $R = |r|^2$ for at partikkelen reflekteres kan skrives på formen

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E + V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0}}\right)^2.$$

Hvorfor er uttrykket for R fornuftig i grensen $|V_0| \to 0$.

Siden k og q inneholder en felles faktor $\sqrt{2m}/\hbar$, kan denne forkortes overalt i uttrykket for r. Dermed har vi

$$R = |r|^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E + V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0}} \right)^2 ,$$

som vi skulle vise. Vi ser at $R \to 0$ når $|V_0| \to 0$. Dette er rimelig, for da har vi ikke lenger noe potensialstup.

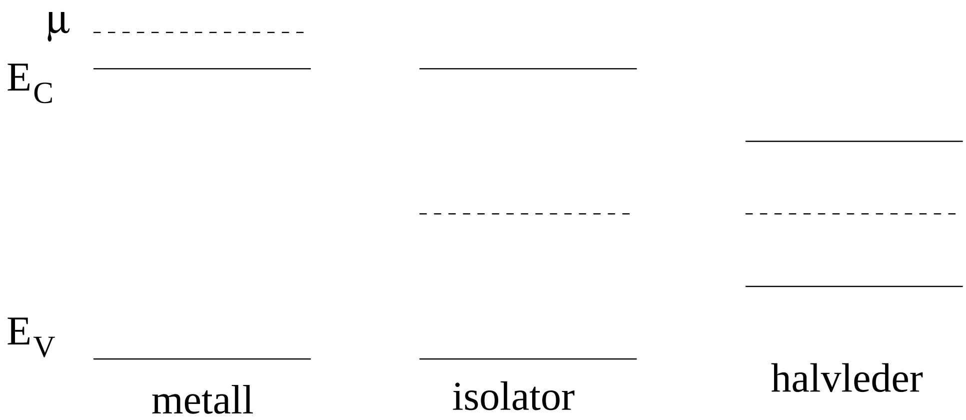
d) Kommenter hvordan resultatet for R skiller seg fra det klassiske tilfellet, dvs dersom den innkommende partikkelens oppførsel i det samme potensialet hadde vært bestemt av klassisk fysikk. Kommenter spesielt grensetilfellet $|V_0| \to \infty$.

Med klassisk fysikk er det ingen refleksjon i $x = 0$ siden $E > V(x)$ overalt, dvs klassisk er $R = 0$ og $T = 1$. Med kvantemekanikk er det en viss sannsynlighet for at partikkelen reflekteres et sted der verdien av potensiell energi endrer seg. Spesielt tydelig blir forskjellen i grensen $|V_0| \to \infty$ – da ser vi at $R \to 1$ – med andre ord: klassisk fysikk hevder at partikkelen med sikkerhet blir transmittert, mens kvantemekanikken viser at partikkelen med sikkerhet blir reflektert!

Oppgave 4. Energibånd og materialegenskaper (Poeng: 5 + 5 + 5 = 15)

Bruk gjerne både tekst og figur(er) til å besvare denne oppgaven.

a) Ta utgangspunkt i en krystalls valensbånd (med øvre energi E_V), ledningsbånd (med nedre energi $E_C > E_V$, dvs de to båndene overlapper ikke), og kjemisk potensial (Ferminivå) μ, og forklar hvordan disse tre energistørrelsene avgjør om krystallen er et metall, en isolator eller en halvleder.



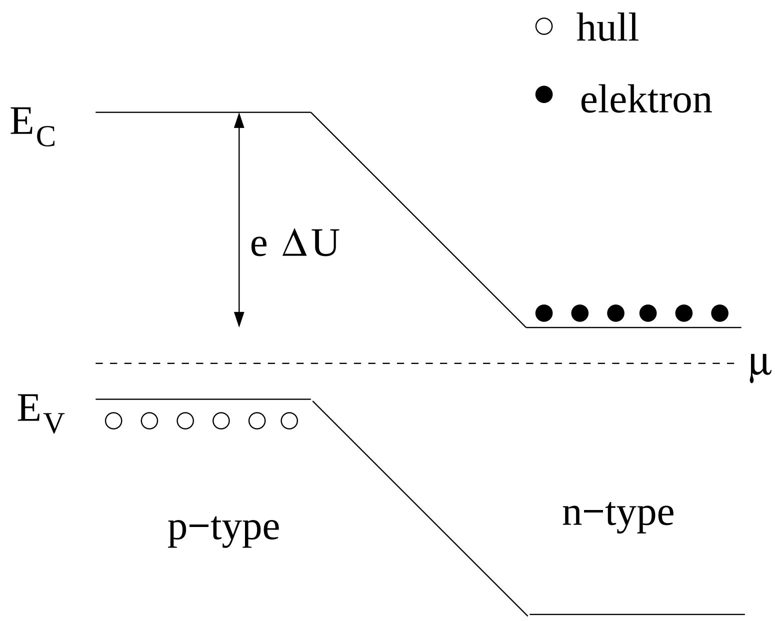
Hvis øverste bånd er delvis fylt av elektroner, vil kjemisk potensial μ ligge i dette båndet (ledningsbåndet, $\mu > E_C$), og krystallen er et metall (dvs en elektrisk leder). Hvis øverste bånd er fylt av elektroner, er krystallen et ikke–metall, og μ ligger (i en perfekt, ren krystall) midt mellom valensbåndet og ledningsbåndet. Hvis båndgapet, $E_g = E_C - E_V$, er stort (mer enn et par–tre eV), er krystallen en isolator. Hvis E_g er mindre enn ca 3 eV, er krystallen en halvleder.

b) Forklar hvordan doping (forurensing) av en halvlederkrystall påvirker materialets elektriske ledningsevne. Bruk som eksempel en silisiumkrystall (Si; 4 elektroner i ytterste skall) som dopes ved at en liten andel av Si–atomene erstattes av fosfor (P; 5 elektroner i ytterste skall).

Ett av fosfors fem valenselektroner vil være til overs etter at det er dannet kovalente bindinger med de fire nærmeste silisiumatomene. I energibånddiagrammet gjenspeiles dette i et "donornivå" like under ledningsbåndkanten E_C i silisium. Et elektron i dette energinivået vil lett eksiteres til ledningsbåndet og bidra til å øke materialets elektriske ledningsevne. Økt temperatur resulterer i flere elektroner eksitert fra donornivået til ledningsbåndet, og dermed økt ledningsevne.

c) Skisser hvordan E_C, E_V og μ varierer med posisjonen over en *pn*–overgang i likevekt (dvs når det kjemiske potensialet μ er konstant i hele systemet). Bruk figuren til å gi en kort, kvalitativ forklaring på hvorfor *pn*–overgangen er en *likeretter* (dvs at den leder strøm godt den ene veien og dårlig den andre veien).

Det kjemiske potensial ligger like over valensbåndkanten i den *p*–dopede halvlederen og like under ledningsbåndkanten i den *n*–dopede halvlederen. Energibånddiagrammet blir dermed omtrent slik i likevekt, med et såkalt innebygd potensial $e\,\Delta U$:



Med positiv spenning U_0 på *p*–siden (positiv "forspenning") reduseres energibarrieren (fra $e\,\Delta U$ til $e\,\Delta U - eU_0$) for transport av elektroner mot venstre og hull mot høyre, og strømmen øker raskt med U_0 (eksponentielt, pga Boltzmannfaktoren). Med negativ forspenning heves energibarrieren, og vi får kun en liten strøm (som ikke er null, pga at vi har et lite antall elektroner på *p*–siden og et lite antall hull på *n*–siden av overgangen).