

Oppgave 1. Bohrmodellen. (Poeng: 10)

I Bohrs modell for hydrogenatomet antar man at elektronet går i sirkelbane rundt kjernen, med kvantisert dreieimpuls,

$$L = |\mathbf{L}| = rmv = n\hbar,$$

med $n = 1, 2, 3, \dots$ og $\hbar = h/2\pi$ (den reduserte Planck konstant). Her er m elektronmassen, r er sirkelbanens radius og v er elektronets hastighet. Vis at disse to (feilaktige!) antagelsene gir (de korrekte!) energinivåene

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2} \left(\simeq -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \right).$$

Opgitt: $F = q_1q_2/4\pi\epsilon_0r^2$ $V = q_1q_2/4\pi\epsilon_0r$ $a = v^2/r$

LF oppgave 1:

Newtons 2. lov, med $a = v^2/r$ og F som oppgitt, gir sammenhengen mellom v og r :

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0mr}}.$$

Total energi $E = K + V$ kan da uttrykkes ved r :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0r}.$$

Kvantisering av dreieimpulsen gir deretter baner med bestemte radier r_n , og dermed bestemte energier E_n :

$$\begin{aligned} rmv &= n\hbar \\ \Rightarrow rm\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0mr}} &= n\hbar \\ \Rightarrow r_n &= n^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \\ \Rightarrow E_n &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0r_n} = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2} \end{aligned}$$

Oppgave 2. Fri partikkel og partikkel i boks. (Poeng: 30)

En fri partikkel med masse m befinner seg i det konstante potensialet $V = 0$ og beskrives av (den ikke-normerbare) bølgefunksjonen

$$\Psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)},$$

dvs en plan bølge. Her er k å anse som en kjent størrelse.

a) Uttrykt ved hjelp av k , hva er partikkelens impuls p , bølgelengde λ , energi E , og vinkelfrekvens ω ?

b) Hva er sannsynlighetsstrømmen j assosiert med denne partikkelen?

Dersom partikkelen begrenses til å bevege seg mellom $x = 0$ og $x = L$ (dvs $V = 0$ for $0 < x < L$ og $V = \infty$ ellers), er de mulige stasjonære tilstandene

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-iE_n t/\hbar}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

c) Vis at Schrödingerligningen nå gir

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

som de mulige energieigenverdiene for partikkelen.

d) For en partikkel som befinner seg i en gitt tilstand $\Psi_n(x, t)$, hva er forventningsverdiene $\langle x_n \rangle$ og $\langle p_n \rangle$ for henholdsvis posisjon og impuls? (Tips: Symmetri.)

e) For en partikkel som befinner seg i en gitt tilstand $\Psi_n(x, t)$, begrunn hvorfor usikkerheten (standardavviket) i partikkelens impuls, Δp , ikke kan være mindre enn \hbar/L .

f) Anta at en partikkel beskrives av (den ikke-stasjonære men normerte) tilstanden

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^5 c_n \Psi_n(x, t) \quad \text{med} \quad c_1 = c_5 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = c_4 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Bestem forventningsverdien $\langle E \rangle$ til partikkelens energi.

LF oppgave 2:

a) Den plane bølgen er egenfunksjon til impulsoperatoren \hat{p} :

$$\hat{p}\Psi(x, t) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} = \hbar k e^{i(kx - \omega t)},$$

dvs $p = \hbar k$. Dermed er $\lambda = h/p = 2\pi/k$, $E = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$ og $\omega = E/\hbar = \hbar k^2/2m$.

b) Sannsynlighetsstrøm:

$$j = \text{Re} \left[e^{-ikx} \frac{\hbar}{mi} i k e^{ikx} \right] = \frac{\hbar k}{m}.$$

c) Med $V = 0$ og $\hat{H} = \hat{K}$ blir SL

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_n.$$

Innsetting av oppgitt $\Psi_n(x, t)$ gir da

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

Her var det også OK å sette direkte inn i TUSL.

d) Potensialet $V(x)$ er symmetrisk om $x = L/2$. Da er alle stasjonære tilstander enten symmetriske eller antisymmetriske om $x = L/2$. Sannsynlighetstettheten blir i begge tilfelle symmetrisk om $x = L/2$, slik at $\langle x_n \rangle = L/2$ for alle n . Denne symmetrien tilsier videre at det er like stor sannsynlighet for å finne partikkelen

med en viss impuls mot høyre som mot venstre, for alle n . Dermed er $\langle p_n \rangle = 0$ for alle n .

e) Usikkerheten Δx i partikkelens posisjon kan her ikke være større enn $L/2$. Heisenbergs uskarphetsprinsipp gir da

$$\Delta p \geq \frac{\hbar/2}{\Delta x} \geq \frac{\hbar/2}{L/2} = \frac{\hbar}{L}.$$

En direkte utregning av Δp (for generell n) er også greit her, men mer arbeid.

f) Benytter oppgitt uttrykk i formelvedlegget:

$$\langle E \rangle = \sum_{n=1}^5 |c_n|^2 E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \cdot \frac{1 + 16 + 54 + 64 + 25}{16} = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{mL^2}.$$

Oppgave 3. Molekyler og spektroskopi. (Poeng: 10)

a) Vibrasjoner i nitrogenmolekylet N_2 kan med brukbar tilnærming betraktes som en enkel endimensjonal harmonisk oscillator, med egenfrekvens $\nu = \omega/2\pi \simeq 7.1 \cdot 10^{13}$ Hz. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere N_2 fra laveste til nest laveste vibrasjonsnivå?

b) Rotasjonsbevegelsen til nitrogenmolekylet N_2 kan med brukbar tilnærming betraktes som en stiv rotator. N har atommasse $m_N = 14u$, og bindingslengden i molekylet er $d = 0.11$ nm. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere N_2 fra laveste til nest laveste rotasjonsnivå?

Oppgitt: Tilgjengelig termisk energi ved absolutt temperatur T er ca $k_B T$.

LF oppgave 3:

a) Setter $k_B T_{\text{vib}} = \Delta E = \hbar\omega = h\nu$ og finner

$$T_{\text{vib}} = \frac{h\nu}{k_B} \simeq 3400 \text{ K}$$

b) Treghetsmomentet til N_2 :

$$I = 2 \cdot m \cdot (d/2)^2 = 2 \cdot 14 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27} \cdot (0.11 \cdot 10^{-9}/2)^2 = 1.407 \cdot 10^{-46} \text{ kgm}^2.$$

Vi skal regne ut $\Delta E = E_1 - E_0 = E_1 = \hbar^2/I$, slik at

$$T_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{k_B I} \simeq 6 \text{ K}$$

(Kommentar: Vi ser at $T_{\text{vib}} \gg 300$ K mens $T_{\text{rot}} \ll 300$ K. Dermed bidrar de to kvadratiske rotasjonsfrihetsgradene til varmekapasiteten C_V , mens de to kvadratiske vibrasjonsfrihetsgradene bidrar ikke, med den følge at $C_V/N = 5k_B/2$ ved romtemperatur.)

Oppgave 4. Interferens med store molekyler (Poeng: 10)

Dyktige eksperimentister påviser bølgeegenskaper hos stadig større partikler. I et østerriksk-sveitsisk-tysk samarbeid ble det nylig målt kvantemekanisk interferens ved å sende nanopartikler med hele 810 atomer

($C_{284}H_{190}F_{320}N_4S_{12}$) gjennom et diffraksjonsgitter med spalteavstand 266 nm. (M. Arndt *et al*, *Phys Chem Chem Phys* **15**, 14696 (2013)) Molekylene hadde (gjennomsnittlig) hastighet 85 m/s. De fem ulike elementene som inngår i molekylet, C, H, F, N og S, har atommasser hhv $12u$, $1u$, $19u$, $14u$ og $32u$.

a) Regn ut molekylenes masse, impuls og de Broglie bølgelengde.

b) Bestem avbøyningsvinkelen til 1. ordens intensitetsmaksimum.

LF oppgave 4:

a) Molekylmassen er:

$$M = 284 \cdot 12u + 190 \cdot 1u + 320 \cdot 19u + 4 \cdot 14u + 12 \cdot 32u = 10118u \simeq 10^4u,$$

dvs $1.68 \cdot 10^{-23}$ kg. Med hastighet 85 m/s tilsvarer dette en impuls

$$p = mv = 1.43 \cdot 10^{-21} \text{ kgm/s},$$

og dermed en bølgelengde

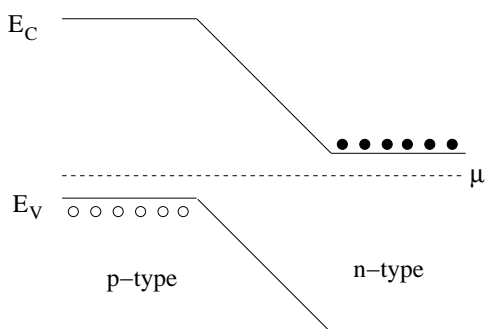
$$\lambda = h/p = 4.64 \cdot 10^{-13} \text{ m} = 464 \text{ fm}.$$

b) Med spalteavstand $d = 266$ nm blir avbøyningsvinkelen til 1. ordens maksimum

$$\theta = \arcsin(\lambda/d) = \arcsin(464 \cdot 10^{-15}/266 \cdot 10^{-9}) = \arcsin(1.74 \cdot 10^{-6}) = 0.0001^\circ.$$

(Kommentar: En så liten avbøyningsvinkel ble i praksis målt ved å flytte diffraksjonsgitteret ørsmå avstander på tvers av partikkelstrålen.)

Oppgave 5. Halvlederfysikk (Poeng: 25)



Figuren viser valensbånd og ledningsbånd for en pn -overgang (diode). Her er E_V , E_C og μ henholdsvis energien ved toppen av valensbåndet, energien ved bunnen av ledningsbåndet og det kjemiske potensialet (like stort overalt i likevekt).

a) Anta at halvledermaterialet er Si (silisium), med 4 valenselektroner. Forklar hvordan man ved å tilsette urenheter (doping) kan lage henholdsvis en p -type og en n -type halvleder. Forklar hvordan slike urenheter påvirker materialets elektriske ledningsevne.

b) Når en spenningskilde U_0 kobles til pn -overgangen, blir strømmen I på formen

$$I(U_0) = I_0 \left(e^{eU_0/k_B T} - 1 \right).$$

Skisser $I(U_0)$ og gi en kvalitativ forklaring på denne strøm–spennings–karakteristikken.

c) Med positiv forspenning ($U_0 > 0$) kan pn -overgangen sende ut fotoner og dermed fungere som en lysemitterende diode (LED). Skisser energibåndene ved pn -overgangen i denne situasjonen og forklar virkemåten.

d) Silisium har et indirekte båndgap mens galliumnitrid (GaN) har et direkte båndgap. Hva innebærer henholdsvis et indirekte og et direkte båndgap? Hvorfor er det fordelaktig med halvledere med direkte båndgap i en LED?

e) Indiumgalliumnitrid, $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, har et direkte båndgap som avhenger av andelen indium, og som kan varieres fra 0.69 eV ($x = 1$) i InN til 3.4 eV ($x = 0$) i GaN. Regn ut bølgelengdeområdet som kan dekkes av slike LED-pærer når x varieres fra 0 til 1.

LF oppgave 5:

a) Atomer med 3 valenselektroner vil typisk ha en ledig tilstand med energi like over valensbåndkanten E_V . Et elektron kan dermed lett eksiteres fra valensbåndet i silisium, bindes til urenheten, og etterlate seg et mobilt hull med positiv ladning i valensbåndet. Slik kan konsentrasjonen av mobile hull bli bortimot lik konsentrasjonen av urenheter i en p -type halvleder.

Atomer med 5 valenselektroner vil typisk ha en okkupert tilstand med energi like under ledningsbåndkanten E_C . Et elektron kan dermed lett eksiteres til ledningsbåndet i silisium. Slik kan konsentrasjonen av mobile elektroner bli bortimot lik konsentrasjonen av urenheter i en n -type halvleder.

I begge tilfelle resulterer dopingene i økt elektrisk ledningsevne.

b) Med positiv forspenning U_0 heves det kjemiske potensialet μ med eU_0 på n -siden av pn -overgangen. Elektroner på n -siden opplever en redusert energibarriere mot transport mot venstre, og i følge Boltzmann avhenger sannsynligheten for at et elektron på n -siden vil komme seg inn i en ledig tilstand i ledningsbåndet på p -siden eksponentielt av forholdet mellom energibarrieren eU_0 og termisk energi $k_B T$. En tilsvarende argumentasjon vil holde for hull i valensbåndet på p -siden. Uten en påtrykt spenning, dvs med $U_0 = 0$, blir selvsagt nettostrømmen over pn -overgangen lik null. Vi ser at uttrykket for $I(U_0)$ passer godt med dette. Med negativ forspenning økes energibarrieren, og det blir kun en liten strøm over pn -overgangen, primært pga elektroner i ledningsbåndet på p -siden og hull i valensbåndet på n -siden.

c) Med positiv forspenning vil elektroner i ledningsbåndet på n -siden og hull i valensbåndet på p -siden kunne bevege seg inn i den såkalte sperresonen (ved "selve" pn -overgangen). Det oppstår en ikke-likevekts-situasjon med for høy konsentrasjon av elektroner og hull i sperresonen. Systemet søker mot likevekt ved at elektroner og hull rekombinerer, og energibevarelse kan ivaretas ved at det sendes ut fotoner, med energi omtrent lik båndgapet $E_g = E_C - E_V$.

d) Se notater, side 128 og 129. Fotonets impuls er typisk så liten at kravet om impulsbevarelse betyr at elektronet og hullet som rekombinerer må ha omtrent like stor impuls, med mindre en annen "partikkel" deltar i prosessen og ivaretar impulsbevarelsen. Dette kan for eksempel være en kvantisert gittervibrasjon, et såkalt fonon. Jo flere partikler som er involvert i en prosess, jo mindre sannsynlig vil den være. Derfor er det en fordel med et direkte båndgap, der emisjon av et foton kan skje uten bidrag fra gittervibrasjoner. Direkte båndgap betyr at bunnen av ledningsbåndet har samme k -verdi som toppen av valensbåndet (typisk $k_C = k_V = 0$). Indirekte båndgap, som i silisium, betyr at forskjellen mellom k_C og k_V er betydelig, og typisk mye større enn det som tilsvarer fotonets impuls.

e) For fotoner har vi $E = h\nu = hc/\lambda$. Dermed:

$$\lambda_{\min} = hc/E_{\max} = 366 \text{ nm} \quad , \quad \lambda_{\max} = hc/E_{\min} = 1801 \text{ nm}.$$

Dvs, hele det synlige området og et godt stykke inn i IR-området.

Oppgave 6. Kjernefysikk (Poeng: 15)

a) Avbildning med kjernemagnetisk resonans (MRI) er basert på at en magnetisk dipol med magnetisk moment $\boldsymbol{\mu}$ har en potensiell energi som avhenger av dipolens orientering i et ytre magnetfelt \mathbf{B} ,

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}.$$

Anta hydrogenkjerner med ett proton og kvantisert magnetisk moment $\mu_z = 2.7928 \mu_N$, med retning parallelt eller antiparallelt med et ytre magnetfelt $\mathbf{B} = B \hat{z}$ langs z -aksen. Slike kjerner kan da absorbere (og reemitte) fotoner med en energi som tilsvarer at den magnetiske dipolen skifter retning. Bestem fotonenes bølgelengde (i vakuum og luft) når styrken på magnetfeltet er 7.0 T.

b) Væskedråpemodellen gir et empirisk uttrykk for bindingsenergien til atomkjerner med nukleontall A og atomnummer Z (dvs $N = A - Z$ nøytroner):

$$E_B = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm C_5 A^{-4/3}.$$

Her er $C_1 - C_5$ positive empiriske koeffisienter, alle med dimensjon energi. Forøvrig *defineres* en kjernes bindingsenergi som endringen i hvileenergi når atomet ${}^A_Z X$ splittes opp i Z hydrogenatomer (${}^1_1 H$) og N nøytroner:

$$E_B/c^2 = Z \cdot M_H + N \cdot m_n - M_X.$$

- Hvilket ledd i væskedråpemodellen tar hensyn til at dannelse av heliumkjerner bidrar til å stabilisere kjernen? Begrunn hvorfor.
 - Hvilket ledd i væskedråpemodellen tar hensyn til coulombfrastøtningen mellom protonene?
- c) Naturlig radioaktivitet skyldes stort sett spontan α -decay (frigjøring av ${}^4_2 He$) og spontan β^- -decay (frigjøring av et elektron). Hva skjer med atomnummeret Z i disse prosessene? Hva skjer med nukleontallet A i disse prosessene? Vis at ${}^{222}_{86} Rn$ (radon) kan omdannes til den stabile isotopen ${}^{206}_{82} Pb$ (bly) via α - og β^- -decay. Hvor mange av hver?

LF oppgave 6:

a) Forskjellen i potensiell energi med protonets magnetiske dipolmoment hhv motsatt rettet \mathbf{B} og parallelt med \mathbf{B} er

$$\Delta E = \mu_z B - (-\mu_z B) = 2\mu_z B = 1.975 \cdot 10^{-25} \text{ J}.$$

Dette tilsvarer fotoner med bølgelengde

$$\lambda = hc/\Delta E = 1.0 \text{ m}.$$

b) Ledd nr 4 favoriserer dannelse av heliumkjerner, dvs en god balanse mellom antall nøytroner N og antall protoner Z . Dette oppnås her ved å trekke fra et bidrag som øker med absoluttverdien av $N - Z$, for eksempel proporsjonalt med $-(N - Z)^2$. Og siden $A = N + Z$, dvs $N - Z = A - Z - Z = A - 2Z$, for

eksempel proporsjonalt med $-(A - 2Z)^2$.

Ledd nr 3 gir redusert E_B pga at Z protoner frastøtes av de $Z - 1$ øvrige; dermed et ledd proporsjonalt med $-Z(Z - 1)$.

c) Ved α -decay mister kjernen 2 protoner og 2 nøytroner. Følgelig reduseres nukleontallet A med 4 og atomnummeret Z med 2. Ved β^- -decay omdannes et nøytron i kjernen til et proton, slik at ladningsbevarelse er ivaretatt. (Dessuten sendes det ut et elektrisk nøytralt antinøytrino, slik at totalt spinn også er bevart.) Dermed endres nukleontallet ikke, men atomnummeret økes med 1.

Vi kan redusere A fra 222 til 206 via 4 stk α -decay. Uten ytterligere prosesser ville dette redusere Z fra 86 til 78, men kombinert med 4 stk β^- -decay ender vi der vi skal, på bly og $Z = 82$.

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

- Plancks strålingslov ($I(\nu, T)$ = utstrålt energi pr tids-, flate- og frekvensenhet):

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/k_B T} - 1)}$$

- Fotoelektrisk effekt:

$$U = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Relativistisk energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ E_0 &= m c^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + (m c^2)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E , \mathbf{p} , E_k og m bevart.

- Uelastisk prosess: E og \mathbf{p} bevart.

- Bølger:

$$c = \lambda \nu$$

- de Broglie:

$$\lambda = h/p \quad , \quad \nu = E/h$$

- Schrödingerligningen (SL):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

- Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL):

$$\hat{H} \psi = E \psi$$

- Operatorer:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2, \quad f(p) \rightarrow f(\hat{p})$$

- Heisenbergs uskarphetsprinsipp:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|$$

- Kommutator:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$$

- Stasjonær tilstand:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

- Forventningsverdier:

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx, \quad \langle p_x \rangle = \int \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx, \quad \langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi d\tau$$

- Bølgepakke:

$$\Psi(x, t) = \sum_j c_j \psi_j(x) e^{-iE_j t/\hbar}, \quad \langle F \rangle = \sum_j |c_j|^2 F_j$$

- Grensebetingelser:

$\psi(x)$ kontinuerlig overalt, $d\psi/dx$ diskontinuerlig kun ved ∞ sprang i $V(x)$

- Sannsynlighetsstrøm:

$$j = \text{Re} \left[\Psi^* \left(\frac{\hbar}{mi} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \right]$$

- Usikkerhet:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

- Ehrenfests teorem:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = -\langle \nabla V \rangle$$

- Harmonisk oscillator:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

- Stiv rotator:

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad I = \text{treghetsmoment} = \sum_j m_j r_j^2$$

- Redusert masse μ :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots$$

- Konstruktiv interferens:

$$d \sin \theta = n \lambda$$

Fundamentale konstanter:

$$\begin{aligned}k_B &= 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\N_A &= 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ \hbar &= h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ m_e &= 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ m_p &= 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ m_n &= 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ u &= 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ c &= 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \alpha &= e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137.0 \\ a_0 &= 4\pi\epsilon_0\hbar^2/e^2m_e = 0.5292 \text{ \AA} \\ \mu_B &= e\hbar/2m_e = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \\ \mu_N &= e\hbar/2m_p = 5.051 \cdot 10^{-27} \text{ J/T} \\ R_\infty &= \frac{1}{2}m_e c^2 \alpha^2 = 13.61 \text{ eV}\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}1 \text{ eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ \AA} &= 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m} \\ 1 \text{ T} &= 10^4 \text{ G (gauss)} \\ k_B T &\simeq \frac{1}{40} \text{ eV ved } T = 300 \text{ K}\end{aligned}$$