Løsningsforslag elektrokjemi

Oppgave 1

i) $E^0 = E^0_{red} + E^0_{oks} = (1{,}23 + 0{,}44)V = 1{,}67\ V$

ii) Ja, fordi standard cellepotensial er større enn null.

iii) Ag, fordi Au vil ikke løses i verken saltsyre eller salpetersyre, mens Mg, Mn og Ni vil løses i både saltsyre og salpetersyre.

Oppgave 3

(1) MnO_2 (s) + $4H^+$ (aq) + e^- → Mn^{3+} (aq) + $2H_2O$ (l)

Denne halvreaksjonen står ikke i SI, men vi kan finne halvreaksjonene

(2) MnO_2 (s) + $4H^+$ + $2e^-$ → Mn^{2+} + $2H_2O$ (l) $E°_1 = 1.23$ V
(3) Mn^{3+} + e^- → Mn^{2+} $E°_2 = 1.56$ V

Ser at vi kan få reaksjon (1) ved å ta reaksjon (2) minus reaksjon (3). Vi kan summere ΔG for reaksjonene på samme måte:

$$\Delta G_1^\circ = \Delta G_2^\circ - \Delta G_3^\circ$$

$$-n_1 F E_1^\circ = -n_2 F E_2^\circ - (-n_3 F E_3^\circ)$$

$$n_1 E_1^\circ = n_2 E_2^\circ - n_3 E_3^\circ$$

Setter inn $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$ og de kjente E°-verdiene:

$$E_1^\circ = 2 \cdot 1.23\ V - 1.56\ V = \underline{\underline{0.90\ \text{V}}}$$

Oppgave 4

i) Drivkraften i en konsentrasjonscelle er å utjevne konsentrasjonsforskjeller mellom to halvceller. Det er en spontan prosess. Det betyr at anoden står i den halvcellen med lavest konsentrasjon, mens katoden står i den halvcellen med høyest konsentrasjon.

i) Bruk Figur 1, og ta stilling til påstandene under. Her gis det minuspoeng for feil delsvar.

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ Elektronene går fra høyre mot venstre halvcelle
- ☐ Elektronene vil ikke bevege seg gjennom kretsen
- ☐ Elektroden i venstre halvcelle er anode ✔
- ☐ Elektroden i venstre halvcelle er katode
- ☐ Elektronene går fra venstre mot høyre halvcelle ✔
- ☐ Elektroden i høyre halvcelle er anode
- ☐ Elektroden i høyre halvcelle er katode ✔

ii) Bruk Figur 2, og ta stilling til påstandene under. Her gis det minuspoeng for feil delsvar

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ Elektronene går fra høyre mot venstre halvcelle
- ☐ Elektronene vil ikke bevege seg gjennom kretsen ✔
- ☐ Voltmeteret vil vise -0,24 V
- ☐ Elektronene går fra venstre mot høyre halvcelle
- ☐ Voltmetert vil vise 0 V ✔
- ☐ Voltmeteret vil vise 0,24 V

Oppgave 5

Må bruke Nernst ligning for å beregne konsentrasjonen:

$$E = E^0 - \frac{0{,}0592\ V}{n} \log Q$$

Siden dette er en konsentrasjonscelle, så er standard cellepotensial lik null.

Vi har følgende halvreaksjoner:

$$Oksidasjon: Ni(s) \rightarrow Ni^{2+}(aq)_{anode} + 2e^-$$

$$Reduksjon: Ni^{2+}(aq)_{katode} + 2e^- \rightarrow\ Ni(s)$$

$$Total\ reaksjon: Ni^{2+}(aq)_{katode} \rightarrow Ni^{2+}(aq)_{anode}$$

Setter opp uttrykket for Q:

$$Q = \frac{[Ni^{2+}]_{anode}}{[Ni^{2+}]_{katode}} = \frac{1{,}0 * 10^{-3}}{x}$$

Setter inn i Nernst ligning:

$$E = -\frac{0{,}0592\ V}{2} \log(\frac{1{,}0 * 10^{-3}}{x})$$

Løser med hensyn på x og får: $x = [Ni^{2+}] = \mathbf{1{,}0\ M}$

Oppgave 6

i) Metanolbrenselcelle: $CH_3OH(l) + H_2O(g) \rightarrow CO_2(g) + H_2(g)$

Reaksjonen er ubalansert, så må først balansere. Bruker oksidasjonstall:

C: -2 → +4 reduseres

H: +1 → 0 oksideres

Setter opp halvreaksjoner:

Oksidasjon: $CH_3OH(l) \rightarrow CO_2(g) + 6e^-$

Reduksjon: $H_2O(g) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$ |*3

Må ta ladningsbalanse og massebalanse, antar surt miljø (balanserer derfor med H+-ioner):

Oksidasjon: $CH_3OH(l) + H_2O(g) \rightarrow CO_2(g) + \cancel{6e^- + 6H^+(aq)}$

Reduksjon: $\cancel{3H_2O(g)} + \cancel{6e^- + 6H^+(aq)} \rightarrow 3H_2(g) + \cancel{3H_2O(g)}$

Total reaksjon: $\boldsymbol{CH_3OH(l) + H_2O(g) \rightarrow CO_2(g) + 3H_2(g)}$

Finner ΔG^0_{rx} for reaksjonen:

$\Delta G^0_{rx} = \Delta G^0_{f,CO2} + 3\Delta G^0_{f,H2} - \Delta G^0_{f,CH3OH} - \Delta G^0_{f,H20}$

$$\Delta G_{rx}^0 = [-394 + 3 * 0 - (-163) - (-229)] \frac{kJ}{mol} = -2 \frac{kJ}{mol}$$

Finner standard cellepotensial:

$$E^0 = -\frac{\Delta G_{rx}^0}{nF} = -\frac{-2000 \frac{J}{mol}}{6 * 96500 \frac{C}{mol}} = \boldsymbol{3{,}45\ mV}$$

ii) Setter opp halvreaksjoner:

Oksidasjon: $Ag(s) \rightarrow Ag^+(aq)_{anode} + e^-$

Reduksjon: $Ag^+(aq)_{katode} + e^- \rightarrow Ag(s)$

Total reaksjon: $\boldsymbol{Ag^+(aq)_{katode} \rightarrow Ag^+(aq)_{anode}}$

Drivkraften er konsentrasjonsforskjell. Elektronene vil gå fra den halvcellen med lavest konsentrasjon til den halvcellen med høyest konsentrasjon. Det betyr at anoden vil være elektroden i den halvcellen med lavest konsentrasjon, og katoden vil være elektroden i den halvcellen med høyest konsentrasjon.

Startkonsentrasjoner: $[Ag^+]_{anode} = 1{,}0 * 10^{-3} M \rightarrow n_{Ag+} = 1{,}0 * 10^{-3} M * 2{,}0\ L = 0{,}002\ mol$

$$[Ag^+]_{katode} = 1{,}25\ M \rightarrow n_{Ag+} = 1{,}25\ M * 2{,}0\ L = 2{,}5\ mol$$

Når batteriet er utladet så vil $n_{Ag+,anode} = (0{,}002 + 2{,}5) mol = 2{,}502\ mol$

Bruker Faradays lov for å finne tiden:

$$t = \frac{n_{Ag+,anode} * n_{e-} * F}{I} = \frac{2{,}502\ mol * 1 * 96500\ C/mol}{2{,}5\ A} = 96577\ s = \boldsymbol{27\ timer}$$

NB! Ser at mange har fått t=13,4 timer. Dette gis også full score på!

Oppgave 7

i) Hva dannes lettest på **anoden**?
Velg ett alternativ

- O_2(g) og H^+-ioner ✓
- Br_2(l)
- Br_2(aq)

ii) Hva dannes lettest på **katoden**?
Velg ett alternativ

- H_2O(l)
- H_2(g) og OH^--ioner
- Cu(s) ✓

iii) Hvilken spenning må mimimum påtrykkes for å få reaksjonen til å gå (den reaksjonen som skjer lettest)?
Velg ett alternativ

- 0,89 V
- 1,24 V
- 0,48 V ✓
- 0,76 V
- 0,74 V

Oppgave 8

i) Termodynamiske grunnlaget for korrosjon: Korrosjon er en spontant prosess, som betyr at endring i Gibbs' energi er mindre enn null: $\Delta G = -nFE < 0$, det $gir\ at\ E > 0$

ii) Siden røret og pumpen er laget av to ulike metallegeringer med ulikt potensial, vil det være en galvanisk kobling i systemet. Spesifikke tiltak mot galvanisk korrosjon vil være å hindre metallisk kontakt mellom rør og pumpe. Det er også en mulighet å behandle sjøvannet slik at det blir mindre korrosivt. Sjøvann inneholder ioner, som bidrar til et aggressivt miljø for materialene. En annen mulighet er å legge inn et «offer-rør» mellom pumpe og rustfritt rør, f.eks. bruke et plastrør. Da hindrer vi metallisk kontakt. Man kan også bytte material på pumpe eller rør slik at det blir likt material på begge deler.

Felles mekanikkdel

Oppgave 9

Definisjonen av gjennomsnittsfart som

$$\overline{v} = \frac{\text{tilbakelangt strekning}}{\text{tid}},$$

og dessuten at ved kontant fart v er tiden t gitt ved

$$t = \frac{s}{v},$$

gir at

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \frac{50\,\text{km} + 160\,\text{km}}{\frac{50\,\text{km}}{50\,\text{km/h}} + \frac{160\,\text{km}}{80\,\text{km/h}}} \\ &= \frac{210\,\text{km}}{3\,\text{h}} \\ &= \underline{\underline{70\,\text{km/h}}}\end{aligned}$$

Oppgave 10

La kulas posisjon være $y_1$ved $t = \Delta t$, og y_2 ved $t = 2\Delta t$. Ettersom kula starter i ro i $y_0 = 0$ ved $t = 0$ får vi

$$\begin{aligned}\Delta y_1 &= y_1 - y_0 \\ &= \underline{\frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2}\end{aligned}$$

I det neste tidsintervallet faller kula en strekning Δy_2 som blir

$$\begin{aligned}\Delta y_2 &= y_2 - y_1 \\ &= \frac{1}{2} g \left(2\Delta t\right)^2 - \frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2 - \frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2 \\ &= \underline{3 \cdot \frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2}\end{aligned}$$

Dette gir at

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2}{\frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2} = \underline{\underline{3}}$$

Oppgave 11

i) I det høyeste punktet i banen er farten $\vec{v}$ horisontal ($v_y = 0$), sånn at farten i det høyste punktet blir lik horisontalkomponenten v_{0x} av startfarten:

$$\begin{aligned}v &= v_{0x} \\ &= v_0 \cos \alpha \\ &= 10\,\text{m/s} \cdot \cos 25^\circ \\ &= \underline{\underline{8,2\,\text{m/s}}}\end{aligned}$$

ii) Finner først falltiden t (velger positiv retning oppover):

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$-1,0 = 10 \sin 35^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 \qquad \text{(Sløyfer enheter)}$$

Denne andregradslikninga har løsningen

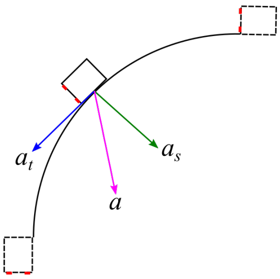
$$t = 1,32\,\mathrm{s},$$

som gir at

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ &= v_0 \cos\alpha \cdot t \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \cos 35^\circ \cdot 1,32\,\mathrm{s} \\ &= 10,8\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{11\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

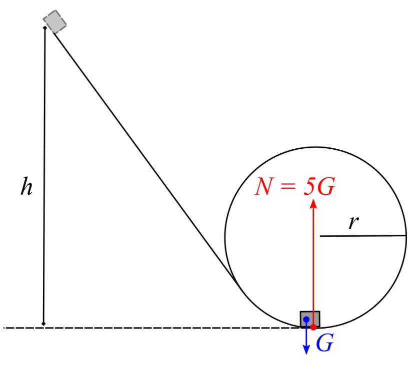
Figuren under viser komponentene til akselerasjonen $\vec{a}$ for bilen idet den kjører gjennom svingen med avtakende banefart: sentripetalakselerasjonen $\vec{a}_r$ (pga. sirkelbevegelsen) og tangentialakselerasjonen $\vec{a}_t$, fordi banefarten avtar.



Akselerasjonen får altså retningen vist på figuren.

Oppgave 13

Skal bestemme den største høyden h vogna kan slippes fra for at normalkrafta i det laveste punktet skal bli maksimalt $5G$, slik figuren under viser.



I det laveste punktet gir Newtons 2. lov følgende restriksjon på farten v i det laveste punktet:

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ N - G &= m\frac{v^2}{r} \\ 5G - G &= m\frac{v^2}{r} && \text{(Grensetilfellet)} \\ 4mg &= m\frac{v^2}{r} \\ v^2 &= \underline{4gr} \end{aligned}$$

Energibevaring mellom slippunktet i høyde h og det laveste punktet gir

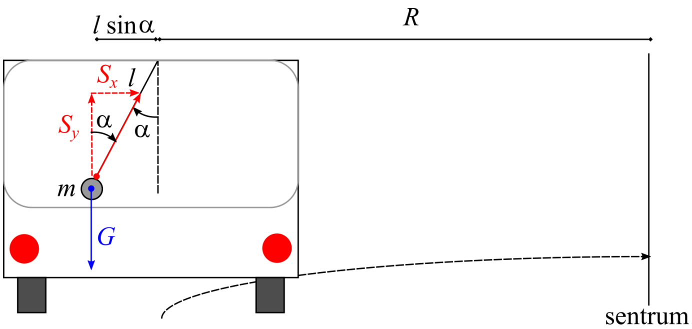
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \underline{2gh}$$

Sammeholdt gir dette følgende verdi for den maksimale slipphøyden h:

$$4gr = 2gh \Rightarrow h = \underline{\underline{2r}}$$

Oppgave 14

Figuren under viser kreftene som virker på kula som henger i snora: snordraget S og tyngden G.



Kula er i ro i vertikalretningen, sånn at

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ S_y &= mg \end{aligned}$$

Newtons 2. lov i x-retningen gir

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma \\ S_x &= \underline{m\frac{v^2}{r}}, \end{aligned}$$

der $r = R + l\sin\alpha$ (som er radiusen for kulas sirkelbevegelse). Sammenhengen mellom S_x og S_y vises fra figuren:

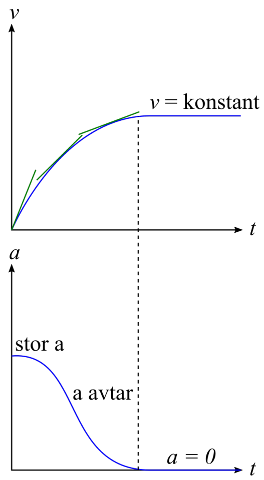
$$\begin{aligned} S_x &= S_y \tan\alpha \\ &= \underline{mg\tan\alpha} && \text{(Ettersom } S_y = mg\text{)} \end{aligned}$$

Kombinerer dette og får

$$\begin{aligned} S_x &= m\frac{v^2}{r} \\ mg\tan\alpha &= m\frac{v^2}{r} \\ v^2 &= gr\tan\alpha \\ v &= \sqrt{gr\tan\alpha} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{g\left(R + l\sin\alpha\right)\tan\alpha}}} \end{aligned}$$

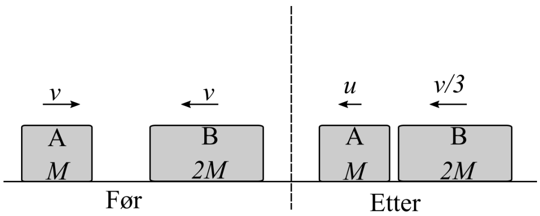
Oppgave 15

Akselerasjonen på et tidspunkt er stigningstallet til fartsgrafen. Bilens fartsgraf viser at bilen starter med full gass og stor akselerasjon (grafen stiger bratt i starten), og så avtar farten mer og mer til den når en maksimalfart. Figuren under viser hvilken graf som er i tråd med denne situasjonen.



Oppgave 16

Figuren under viser kollisjonen:



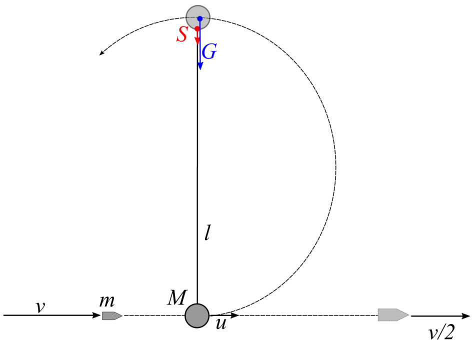
Skal finne sluttfarten u til den letteste steinen. Bevaring av bevegelsesmengde gir (velger positiv retning mot høyre):

$$\begin{aligned}
\sum p_{f\phi r} &= \sum p_{etter} \\
Mv + 2M(-v) &= Mu + 2M \cdot \left(-\frac{v}{3}\right) \\
-Mv &= Mu - \frac{2}{3}Mv \\
-v &= u - \frac{2}{3}v \\
u &= -v + \frac{2}{3}v \\
u &= \underline{\underline{-\frac{v}{3}}}
\end{aligned}$$

Minustegnet signaliserer at steinen beveger seg mot venstre.

Oppgave 17

Figuren under viser situasjonen når prosjektilet treffer pendelkula, som svinger gjennom en hel sirkel:



Pendelkula får farten u etter støtet med prosjektilet. Her er bevegelsesmengden bevart:

$$\begin{aligned}
\sum p_{f\phi r} &= \sum p_{etter} \\
mv &= m \cdot \frac{v}{2} + Mu \\
u &= \frac{mv - \frac{1}{2}mv}{M} \\
u &= \underline{\frac{m}{2M}v}
\end{aligned}$$

I tilfellet der kula akkurat fullfører en hel sirkel, er snordraget på toppen lik null. Hvis u_t er farten til kula på toppen, gir Newtons 2. lov

$$\begin{aligned}
S + G &= m\frac{u_t^2}{l} && \text{(Radius er } l\text{)} \\
mg &= m\frac{u_t^2}{l} && \text{(Når } S = 0\text{)} \\
u_t^2 &= \underline{gl}
\end{aligned}$$

Energibevaring for pendelkula mellom punktet like etter kollisjonen, og toppunktet gir da:

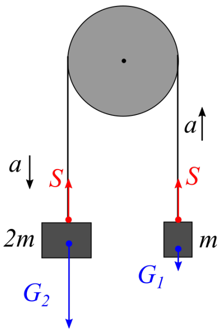
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}Mu^2 &= Mgh + \frac{1}{2}Mu_t^2 && \text{(Her er } h = 2l\text{)} \\
\frac{1}{2}Mu^2 &= Mg \cdot 2l + \frac{1}{2}M \cdot gl \\
\frac{1}{2}u^2 &= \frac{5}{2}gl \\
u^2 &= \underline{5gl}
\end{aligned}$$

Dette gir følgende betingelse på farten v for prosjektilet for at pendelkula skal fullføre en hel sirkel:

$$\begin{aligned}
u^2 &= 5gl \\
\left(\frac{m}{2M}v\right)^2 &= 5gl && \text{(Fra bevaring av bev. mengde)} \\
\frac{m}{2M}v &= \sqrt{5gl} \\
v &= \underline{\underline{2\frac{M}{m}\sqrt{5gl}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 18

i) Figuren under viser kreftene på loddene i situasjonen der trinsa og snora begge er masseløse:



Det samme snordraget S virker i hver ende av den masseløse snora, i tillegg til tyngdene $G_1 = mg$ og $G_2 = 2mg$ på hver kloss. Absoluttverdien til akselerasjonen til klossene vil være den samme, så Newtons 2. lov på hver kloss gir:

$$\begin{aligned}
\sum F_1 &= ma \\
S - G_1 &= ma \\
S - mg &= ma \Rightarrow S = \underline{ma + mg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum F_2 &= 2m \cdot a \\
G_2 - S &= 2m \cdot a \\
2mg - S &= 2m \cdot a
\end{aligned}$$

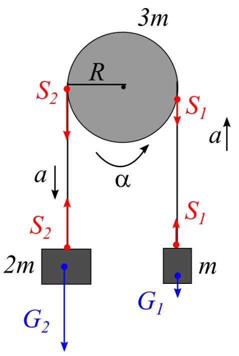
Kombinerer disse to likningene ved å sette inn for S:

$$\begin{aligned} 2mg - S &= 2m \cdot a \\ 2mg - (ma + mg) &= 2ma \\ 2mg - ma - mg &= 2ma \\ 3ma &= mg \\ a &= \underline{\underline{\frac{g}{3}}} \end{aligned}$$

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 5 poeng):

- Figur med inntegnede krefter på klossene (1 poeng)
- Sette opp Newtons 2. lov på hver av de to klossene (2 poeng)
- Kombinere likningene for klossene og finne akselerasjonen (2 poeng)

ii) Figuren under viser situasjonen der trinsa har masse $3m$ og radius r:



Nå virker det forskjellige snordrag S_1 og S_2 i hver ende av den masseløse snora. Newtons 2. lov på hver kloss gir:

$$\begin{aligned} \sum F_1 &= ma \\ S_1 - G_1 &= ma \\ S_1 - mg &= ma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_2 &= 2m \cdot a \\ G_2 - S_2 &= 2m \cdot a \\ 2mg - S_2 &= 2ma \end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon anvendt på trinsa, som har treghetsmoment I om rotasjonsaksen og får en vinkelaks. α:

$$\begin{aligned} \sum \tau &= I\alpha \\ S_2 R - S_1 R &= I\alpha \end{aligned}$$

Ettersom snora ikke glir på trinsa, må klossenes akselersjon a tilsvare den lineære akselerasjonen til et punkt på periferien til trinsa, dvs.

$$a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}.$$

Dette gir:

$$
\begin{aligned}
S_2R - S_1R &= I \cdot \frac{a}{R} \\
S_2R - S_1R &= \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot R^2 \cdot \frac{a}{R} && \text{(Treghetsmoment for massiv skive)} \\
S_2 - S_1 &= \frac{3}{2}ma && \text{(Forkorter } R\text{)}
\end{aligned}
$$

Bruker addisjonsmetoden til å løse likningssettet som var resultatet av Newtons 2. lov på de to klossene:

$$
\begin{aligned}
S_1 - mg &= ma \\
2mg - S_2 &= 2ma
\end{aligned}
$$

Adderer rad 1 til rad 2:

$$
\begin{aligned}
2mg - S_2 + S_1 - mg &= 2ma + ma \\
mg - (S_2 - S_1) &= 3ma \\
mg - \frac{3}{2}ma &= 3ma && \text{(Setter inn fra rotasjonsdel)} \\
3ma + \frac{3}{2}ma &= mg \\
\frac{9}{2}ma &= mg \\
a &= \underline{\underline{\frac{2}{9}g}}
\end{aligned}
$$

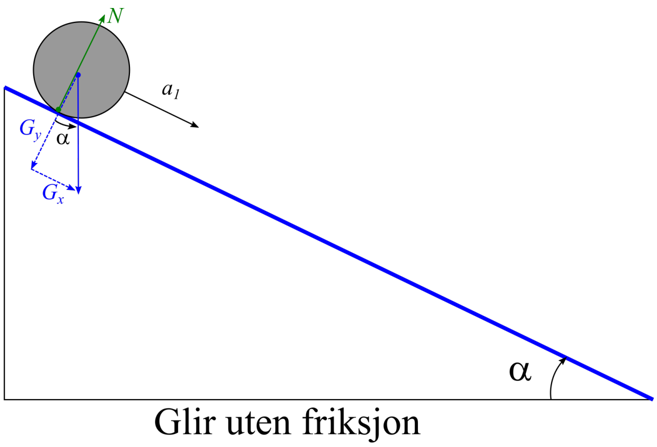
Akselerasjonen blir lavere enn i tilfelle i), som forventet.

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 5 poeng):

- Figur med inntegnede krefter på klossene og trinsa (1 poeng)
- Sette opp Newtons 2. lov på hver av de to klossene og trinsa (2 poeng)
- Kombinere likningene og finne akselerasjonen (2 poeng)

Oppgave 19

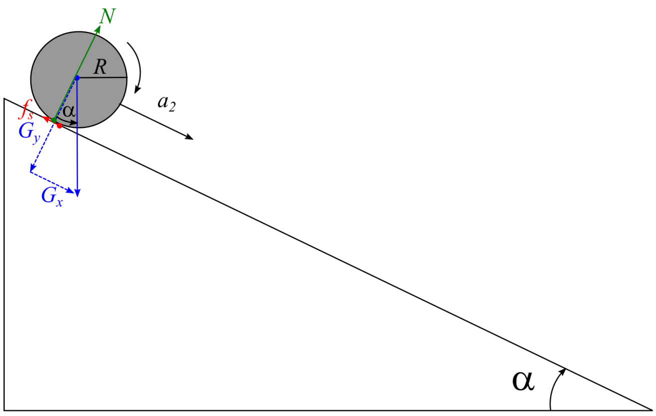
i) Figuren under viser kreftene som virker på sylinderen når den glir nedover et skråplan uten friksjon:



Kun komponenten G_x til tyngden virker langs skråplanet; Newtons 2. lov i denne retningen gir da

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_1 \\ mg\sin\alpha &= ma_1 \\ a_1 &= \underline{\underline{g\sin\alpha}}\end{aligned}$$

ii) I dette tilfellet virker det en friksjonskraft f_s mellom sylinderen og underlaget (det er denne som sørger for at sylinderen ruller), som vist på figuren under:



Ruller uten å gli

I dette tilfellet gir Newtons 2. lov for bevegelsen til massesenteret at

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_2 \\ mg\sin\alpha - f_s &= ma_2\end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon gir sammenhengen (her er I treghetsmomentet til sylinderen om massesenteret):

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ f_s \cdot R &= I\alpha\end{aligned}$$

Ettersom sylinderen ruller uten å gli, er sammenhengen mellom massesenterets akselerasjon a_2 og vinkelakselerasjonen gitt ved

$$a_2 = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_2}{R}$$

Dette gir

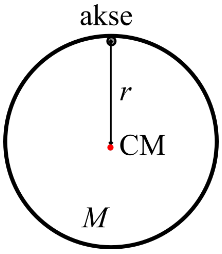
$$\begin{aligned}f_s \cdot R &= I \cdot \frac{a_2}{R} \\ f_s \cdot R &= \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a_2}{R} && \text{(Treghetsm. for sylinder)} \\ f_s &= \frac{1}{2}ma_2\end{aligned}$$

Innsatt i den andre likninga:

$$\begin{aligned}mg\sin\alpha - f_s &= ma_2 \\ mg\sin\alpha - \frac{1}{2}ma &= ma_2 \\ \frac{3}{2}ma_2 &= mg\sin\alpha \\ a_2 &= \underline{\frac{2}{3}g\sin\alpha}\end{aligned}$$

Oppgave 20

Figuren under viser ringen med rotasjonsaksen ved kanten av ringen (en “ring” er pr. definisjon uendelig tynn, og har bare én radius - i motsetning til “hul sylinder”, som har indre/ytre radius).

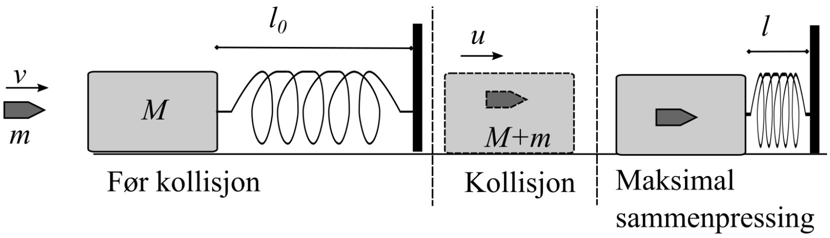


Bruker Steiners sats til å bestemme treghetsmomentet I om aksen: hvis I_{CM} er treghetsmomentet om massesenteret (sentrum) og $d = r$ er avstanden mellom massesenter og akse, får vi

$$\begin{aligned} I &= I_{CM} + Md^2 \\ &= Mr^2 + Mr^2 \\ &= \underline{\underline{2Mr^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 21

i) Figuren under viser situasjonen der kula treffer klossen, og fjæra sammenpresses maksimalt:



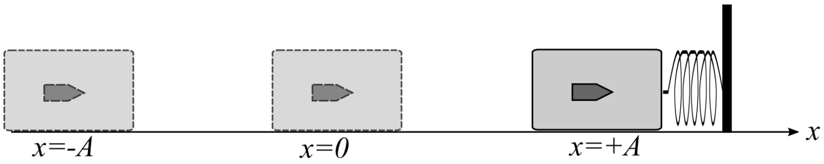
Farten til kule + kloss etter kollisjonen er u. Finner u fra bevaring av bevegelsesmengde, når kollisjonen er fullstendig uelastisk (legemene sitter sammen etterpå):

$$\begin{aligned} \sum p_{før} &= \sum p_{etter} \\ mv &= (M+m)\,u \\ u &= \underline{\frac{m}{M+m}v} \end{aligned}$$

Den maksimale sammenpressingen $x = l - l_0$ av fjæra finner vi fra energibevaring: kinetisk energi for kule + kloss går over til potensiell energi i fjæra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M+m)\,u^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\ x &= \sqrt{\frac{M+m}{k}u^2} \\ &= \sqrt{\frac{M+m}{k}\cdot\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{k}\frac{m^2}{M+m}v^2}}} \end{aligned}$$

ii) Figuren under viser situasjonen der klossen utfører frie svingninger mellom ytterpunktene $x = \pm A$:



Utslaget $x(t)$ fra likevektsstillingen $x = 0$ for en slik svingning er gitt ved

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \\ &= A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}} \cdot t + \phi\right) \qquad (\omega \text{ for fri, udempet svingning}) \end{aligned}$$

Ettersom klossen befinner seg i $x = +A$ ved $t = 0$, skal må faseforskyvningen ϕ være bestemt av

$$\begin{aligned} x(0) &= A \\ A\cos\phi &= A \\ \cos\phi &= 1 \end{aligned}$$

Vinkelen $\phi = 0$ oppfyller denne betingelsen, slik at utslaget blir

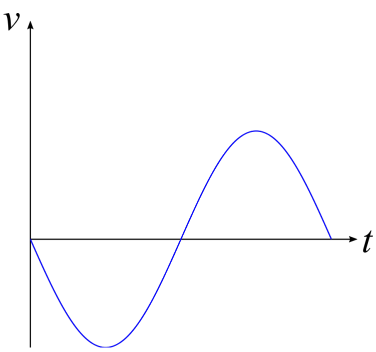
$$x(t) = \underline{\underline{A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}} \cdot t\right)}}$$

Oppgave 22

En kloss er festet til en fjær, og kan svinge uten friksjon på et horisontalt underlag. Klossen dras ut til et maksimalt utslag og slippes med null startfart ved $t = 0$. Vi skal bestemme formen for fartsgrafen til klossen.

En slik svingning blir lik den fra forrige oppgave, dvs. $x(t) = A\cos(\omega t)$. Vi kan så klart finne $v_x = x'(t) = -A\omega \sin \omega t$ og tegne grafen til denne, men er raskt resonnement er like greit: fartsgrafen får form som en cosinus/sinus. Etter at klossen slippes fra $x = +A$ med null startfart, vil farten være negativ (klossen dras i negativ x-retning), før den stanser opp i endepunktet $x = +A$, og farten igjen blir positiv.

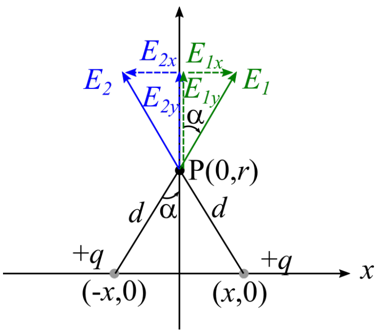
Figuren under viser den eneste fartsgrafen som er i tråd med dette resonnementet:



Elektromagnetisme-del

Oppgave 23

Figuren under viser feltbidragene i punkt $P\,(0, r)$ fra de to punktladningene i $(\pm x, 0)$:



De horisontale feltbidragene E_{1x} og E_{2x} nuller ut hverandre; de vertikale adderes, slik at det totale feltet i y-retning blir

$$\begin{aligned} E_y &= E_{1y} + E_{2y} \\ &= 2 \cdot E_{1y} && \text{(Bidragene er like)} \\ &= 2 \cdot E_1 \cos\alpha && \text{(Fra trigonometri)} \\ &= 2 \cdot \frac{kq}{d^2} \cos\alpha && \text{(Elektrisk felt fra punktladning)} \\ &= \frac{2kq}{x^2 + r^2} \cdot \cos\alpha && \text{(Pytagoras')} \end{aligned}$$

Ut i fra figuren er

$$\cos\alpha = \frac{r}{d} = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

Sammen gir dette

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{2kq}{x^2 + r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \\ &= \underline{\underline{\frac{2kqr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 24

Energibevaring for protonet: idet det slippes fra øverste plate med null fart har det kun potensiell elektrisk energi; ved nedre plate har denne gått over til kinetisk energi (vi kan se bort fra potensiell energi i tyngdefeltet, da tyngderkaften på et proton er neglisjerbar sammenliknet med de elektriske kreftene).

Regnskapet blir altså:

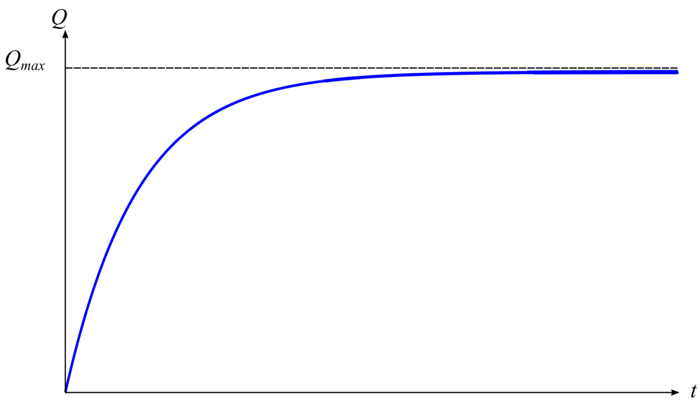
$$
\begin{aligned}
qEd &= \frac{1}{2}mv^2 \\
v &= \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 1,0 \cdot 10^{3}\,\mathrm{V/m} \cdot 0,10\,\mathrm{m}}{1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}} \\
&= 1,38 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{1,4 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 25

i) Ved oppladning av en kondensator med kapasitans C fra et batteri gjennom en motstand med resistans R er ladningen på kondensatoren som funksjon av tid gitt ved

$$Q(t) = Q_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

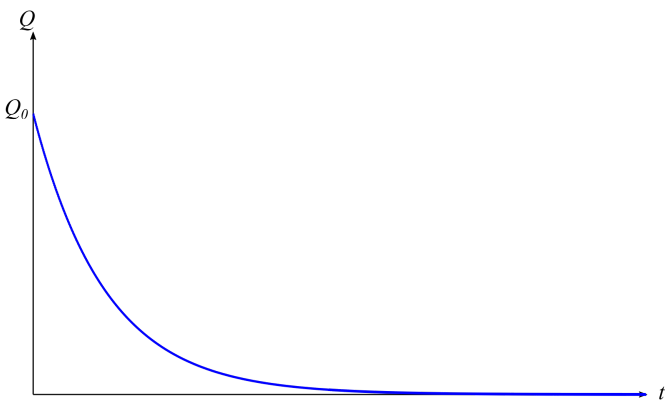
der Q_{max} er den maksimale ladningen som kan lagres på kondensatoren. Grafen til en slik funksjon, dvs. en funksjon på formen $y(x) = \text{konstant} \cdot (1 - e^{-x})$, har en graf som vist på figuren under.



ii) Når en oppladet kondensator med kapasitans C utlades gjennom en motstand med resistans R, er ladningen på kondensatoren gitt ved

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

som altså blir en funksjon som avtar eksponentielt fra en startverdi Q_0. En slik graf er skissert under.



Oppgave 26

i) Så lenge bryter S_2 er åpen, går det ingen strøm i greina med kondensator C_2. Strømmen i kretsen er null idet kondensatoren C_1er maksimalt oppladet, og den maksimale ladningen i dette tilfellet er bestemt av batteriets ems ε:

$$\begin{aligned} Q_{max} &= \varepsilon C_1 \\ &= 20\,\mathrm{V} \cdot 6,0\,\mu\mathrm{F} \\ &= \underline{\underline{120\,\mu\mathrm{C}}} \end{aligned}$$

ii) Når bryteren S_1 åpnes og S_2 lukkes, vil ladningen som i utgangspunktet lå på C_1, fordele seg på de to kondensatorene inntil spenningen over de to kondensatorene er like store. Ut i fra definisjonen av kapasitans er spenningen over kondensatorene gitt ved

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{Q_1}{V} \Rightarrow V = \frac{Q_1}{C_1} \\ C_2 &= \frac{Q_2}{V} \Rightarrow V = \frac{Q_2}{C_2} \end{aligned}$$

At spenningen V skal være den samme over begge kondensatorene gir likningen

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2},$$

med tilleggsbetingelsen

$$Q_1 + Q_2 = Q_0,$$

der $Q_0 = 150\,\mu\mathrm{C}$ er ladningen som i utgangspunktet var lagret på C_1. I denne oppgaven er $C_1 = 2C_2$, slik at vi får

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2} = 2 \Rightarrow Q_1 = 2Q_2$$

Fra tilleggsbetingelsen:

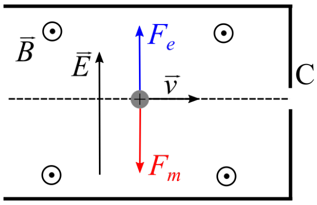
$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= Q_0 \\ 2Q_2 + Q_2 &= Q_0 \\ 3Q_2 &= Q_0 \\ Q_2 &= \frac{Q_0}{3} \\ &= \frac{150\,\mu\mathrm{C}}{3} \\ &= \underline{\underline{50\,\mu\mathrm{C}}} \end{aligned}$$

Da er

$$Q_1 = 2Q_2 = \underline{\underline{100\,\mu\mathrm{C}}}$$

Oppgave 27

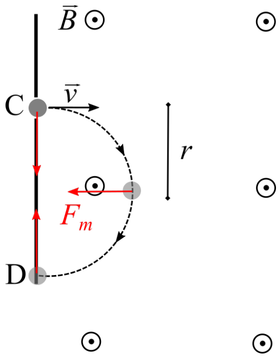
i) Figuren under viser et proton som beveger seg rettlinjet mellom de parallelle platene. I et slikt tilfelle er magnetkraften $F_m = q\left|\vec{v} \times \vec{B}\right| = qvB$ og den elektriske kraften $F_e = qE$ på protonet like store og motsatt rettet, slik figuren under viser:



Dette gir:

$$
\begin{aligned}
qvB &= qE \\
v &= \frac{E}{B} \\
&= \frac{1,0 \cdot 10^5\,\mathrm{V/m}}{0,10\,\mathrm{T}} \\
&= \underline{\underline{1,0 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}
$$

ii) I området etter spalten C er det kun et magnetfelt, slik at protonet kun påvirkes av magnetkraften F_m, som hele tiden står normalt på protonets fartsretning. Protonet vil da avbøyes i en sirkel, slik figuren under viser:



Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen med radius r:

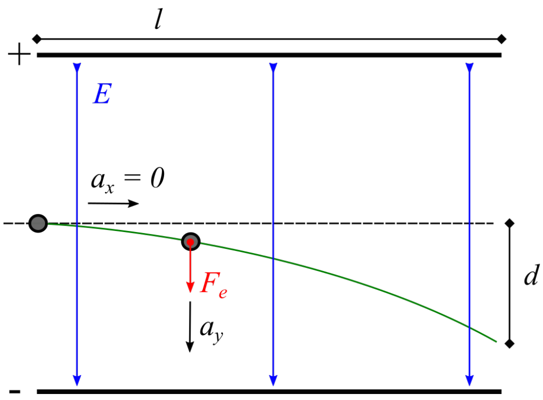
$$
\begin{aligned}
\sum F &= ma \\
qvB &= m\frac{v^2}{r} && \text{(Sentripetalakselerasjon)} \\
r &= \frac{mv}{qB} \\
&= \frac{1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 2,0 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}{1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,10\,\mathrm{T}} \\
&= 0,021\,\mathrm{m} \\
&= \underline{2,1\,\mathrm{cm}}
\end{aligned}
$$

Avstanden CD utgjør diameteren i sirkelen, slik at denne avstanden blir

$$2 \cdot 2,1\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{4,2\,\mathrm{cm}}}$$

Oppgave 28

Vi skal bestemme den vertikale avbøyningen d for et proton som avbøyes i et homogent elektrisk felt E mellom to parallelle plater med lengde l. Figuren under viser kreftene som virker på protonet i området mellom platene (vi kan blankt se bort fra tyngden, som er flere titalls tierpotenser mindre enn den elektriske krafta):



Den elektriske kraften på protonet er gitt ved

$$F_e = qE.$$

Den vertikale akselerasjonen til protonet blir ():

$$\begin{aligned}\sum F_y &= ma_y\\ F_e &= ma_y\\ a_y &= \frac{F_e}{m}\\ &= \underline{\frac{qE}{m}}\end{aligned}$$

Tiden protonet bruker på å passere platene finner vi fra bevegelseslikningen for x-retningen, der farten er konstant og lik den oppgitte startfarten til protonet:

$$x = v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Avbøyningen d blir gitt ved (med $v_{0y} = 0$):

$$\begin{aligned}d &= v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2\\ &= \frac{1}{2}a_y t^2 && \text{(Når } v_{0y} = 0\text{)}\\ &= \frac{1}{2}a_y\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 && \text{(Setter inn for } t\text{)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{qE}{m}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 3,5\cdot 10^{5}\,\mathrm{N/C}}{1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{jg}}\cdot\left(\frac{0,12\,\mathrm{m}}{1,3\cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}}\right)^2\\ &= 1,43\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\\ &\approx \underline{\underline{1,4\,\mathrm{mm}}}\end{aligned}$$

Oppgave 29

i) Selvinduktansen L for en spole er definert som

$$L = N\frac{\Phi_m}{I},$$

der Φ_m er den magnetiske fluksen gjennom spolen på grunn av dens eget magnetfelt B når det går en strøm I gjennom spolen, som har areal A og lengde l. Ut i fra definisjonen av magnetisk fluks:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= BA \\ &= \underline{\mu_0 \frac{N}{l} I \cdot A} \qquad \text{(Formel for magnetfelt inni spole)}\end{aligned}$$

Selvinduktansen blir da

$$\begin{aligned}L &= N\frac{\Phi_m}{I} \\ &= N \cdot \frac{\mu_0 \frac{N}{l} I \cdot A}{I} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 1000^2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{0,10\,\mathrm{m}} \\ &= 1,26 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} \\ &\approx \underline{\underline{1,3\,\mathrm{mH}}}\end{aligned}$$

ii) Ut i fra definisjonen av selvinduktans,

$$L = N\frac{\Phi_m}{I} \Rightarrow \Phi_m = \frac{1}{N} L \cdot I,$$

blir indusert spenning ε i en spole med selvinduktans L gitt ved Faradays induksjonslov:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= N\frac{d\Phi_m}{dt} \\ &= L\frac{dI}{dt} \qquad \text{(Setter inn for } \Phi_m\text{)} \\ &= 50\,\mu\mathrm{H} \cdot \frac{0,80\,\mathrm{A} - 0}{1,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} \qquad \text{(Setter inn kjente tall)} \\ &= \underline{\underline{40\,\mathrm{V}}}\end{aligned}$$

Oppgave 30

i) Fluksen gjennom én sløyfe/spolevinding er gitt ved

$$\Phi_m = BA\cos\phi,$$

der ϕ er vinkelen mellom normalvektoren til sløyfa og magnetfeltet. Den totale fluksen gjennom en spole med N vindinger blir da

$$N\Phi_m = \underline{NBA\cos\phi}.$$

Dersom vinkelen $\phi = \phi_0 = 0$ ved $t = 0$ og spolen dreies med konstant vinkelfart ω, gir "bevegelseslikningene" for konstant vinkelfart at

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + \omega t \\ &= \underline{\omega t}.\end{aligned}$$

Til sammen gir dette at total fluks Φ_{total} gjennom spolen som funksjon av tid blir

$$\Phi_{total} = \underline{\underline{NBA\cos\omega t}}$$

Krav for full uttelling på oppgaven (maks. 3 poeng):

- Referanse til riktig formel for fluks, med faktor N (1 poeng)
- Utregning/forklaring på at vinkelen $\phi(t) = \omega t$ (2 poeng)

ii) Den induserte emsen i spolen er gitt fra Faradays induksjonslov:

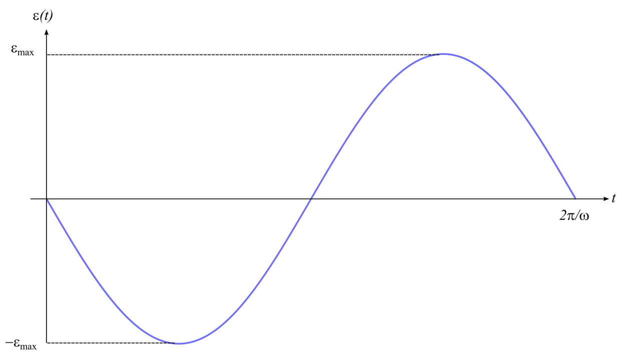
$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d\Phi_{total}}{dt} \\ &= NBA\frac{d}{dt}(\cos\omega t) \\ &= NBA\cdot\omega(-\sin\omega t) \\ &= \underline{\underline{-NBA\omega\sin\omega t}}\end{aligned}$$

Minustegnet er et uttrykk for Lenz' regel om at emsen motvirker fluksendringene; det er et fullt akseptabelt svar å kun angi absoluttverdien til spenningen, dvs. $|\varepsilon|$.

Krav for full uttelling på oppgaven (maks. 4 poeng):

- Sette opp formel for indusert ems ved bruk av Faradays induksjonslov (1 poeng)
- Riktig derivasjon ved bruk av kjerneregel (2 poeng)
- Kommentar til betydningen av minustegnet (1 poeng)

iii) Skisserer $\varepsilon(t)$ for én omdreining, dvs. ωt som løper fra 0 til 2π, som betyr at t ligger i intervallet $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$:



Krav for full uttelling på oppgaven (maks. 3 poeng):

- Korrekt form på sinusfunksjon (med eller uten minustegn) (2 poeng)
- Enheter på aksene (1 poeng)