Løsningsforslag kjemidel eksamen

IFYKJ Fysikk/kjemi

Vår 2020

Oppgave 1

Data for grunnstoff

Grunnstoff	Atom-nummer	Symbol	Masse-tetthet (ved 0 °C) kg/m³	Smelte-punkt °C	Koke-punkt °C	Spesif. varme-kap. J/(kg · K)	Lengde-utvid.-koeff. K⁻¹	Spesif. smelte-varme kJ/kg	Elektro-negativitet
Fermium	100	Fm							
Fluor	9	F	1,696	−220	−184				4,0
Fosfor	15	P	1 820	44	280	757			2,1
Holmium	67	Ho	8 795	1 474	2 695	164			
Hydrogen	1	H	0,090	−259	−252				2,1
Indium	49	In	7 290	156	2 080	236			1,7
Iridium	77	Ir	22 420	2 410	4 130	130	$0,7 \cdot 10^{-5}$		2,2
Magnesium	12	Mg	1 738	648	1 090	1 017	$2,5 \cdot 10^{-5}$	201	1,0
Mangan	25	Mn	7 473	1 244	1 962	477	$2,2 \cdot 10^{-5}$		1,5
Mendelevium	101	Md							
Molybden	42	Mo	10 222	2 617	4 612	251	$0,5 \cdot 10^{-5}$		1,8
Natrium	11	Na	966	97	900	1 226	$7,0 \cdot 10^{-5}$		0,9
Neodym	60	Nd	7 000	1 021	3 068	189			
Neon	10	Ne	0,900	−248	−246				
Oksygen	8	O	1,429	−218	−182				3,5
Osmium	76	Os	22 570	3 045	5 027	130	$0,5 \cdot 10^{-5}$		2,2
Palladium	46	Pd	11 995	1 552	3 140	244			2,2
Platina	78	Pt	21 450	1 772	3 827	134	$0,9 \cdot 10^{-5}$	113	2,2
Titan	22	Ti	4 508	1 660	3 287	523	$0,9 \cdot 10^{-5}$		1,6

i) Hvor mange protoner er det i ^{21}Ne?

10

11

21

31

41

Atomnummer: Z = 10

Antall protoner = 10

ii) En isotop av et grunnstoff inneholder 12 protoner og 13 nøytroner. Hva er symbolet for isotopen på formen $^{A}_{Z}X$?

$\mathbf{^{25}_{12}Mg}$

$^{13}_{12}\mathrm{Mg}$

$^{12}_{25}\mathrm{Mg}$

$^{25}_{13}\mathrm{Al}$

$^{12}_{13}\mathrm{Al}$

Antall protoner = 12, atomnummer, Z = 12

Nukleontall, A = 12 + 13 = 25

$\mathbf{^{25}_{12}Mg}$

iii) Hvilken type binding vil du forvente å finne mellom oksygen og hydrogen i vannmolekylet?

Polar kovalent binding

Upolar kovalent binding

Ionebinding

Metallbinding

Binding mellom to ikke-metaller: kovalent binding

$\Delta EN = EN(\mathrm{O}) - EN(\mathrm{H}) = 3{,}5 - 2{,}2 = 1{,}3$

Polar kovalent binding

iv) Hvilken type binding vil du forvente å finne mellom titan og fluor i TiF_3?

Upolar kovalent binding

Polar kovalent binding

Ionebinding

Metallbinding

Binding mellom metall og ikke-metall: ionebinding.

$\Delta EN = EN(\mathrm{Ti}) - EN(\mathrm{F}) = 4{,}0 - 1{,}6 = 2{,}4$

Oppgave 2

Gitt følgende ubalanserte reaksjonsligning:

$$\mathrm{Al(s)} + \mathrm{Cl_2(g)} \rightarrow \mathrm{AlCl_3(s)}$$

7,5 g Al reagerer med 25,0 g Cl_2 og det dannes 25,0 g $AlCl_3$.

Hva er prosentvis utbytte av $AlCl_3$?

Balansert reaksjonsligning: $\mathrm{2Al(s)} + \mathrm{3Cl_2(g)} \rightarrow \mathrm{2AlCl_3(s)}$

$$n_{Al} = \frac{m_{Al}}{M_{Al}} = \frac{7{,}5\ g}{26{,}98\ g/mol} = 0{,}278\ mol$$

$$n_{Cl_2} = \frac{m_{Cl_2}}{M_{Cl_2}} = \frac{25{,}0\ g}{70{,}9\ g/mol} = 0{,}353\ mol$$

Hvis alt Al reagerer:

$3\ mol\ \mathrm{Al} \leftrightarrow 2\ mol\ \mathrm{Cl_2}$

$$\frac{n_{Cl_2}}{n_{Al}} = \frac{3}{2}$$

$$n_{Cl_2} = \frac{3}{2} n_{Al} = \frac{3}{2} \times 0{,}278\ mol = 0{,}417\ mol$$

Hvis alt Al reagerer trengs 0,417 mol Cl_2.

Hvis alt Cl_2 reagerer:

$2\ mol\ \mathrm{Cl_2} \leftrightarrow 3\ mol\ \mathrm{Al}$

$$\frac{n_{Al}}{n_{Cl_2}} = \frac{2}{3}$$

$$n_{Al} = \frac{2}{3} n_{Cl_2} = \frac{2}{3} \times 0{,}353\ mol = 0{,}235\ mol$$

Cl_2 begrensende reaktant.

$2\ mol\ \mathrm{Cl_2} \leftrightarrow 3\ mol\ \mathrm{AlCl_3}$

$$n_{AlCl_3} = \frac{2}{3} n_{Cl_2} = \frac{2}{3} \times 0{,}353\ mol = 0{,}235\ mol$$

$$m_{AlCl_3} = M_{AlCl_3} \times n_{AlCl_3} = 133{,}33\ g/mol\ \times 0{,}235\ mol = 31{,}3\ g$$

Teoretisk utbytte $AlCl_3$: 31,3 g

Prosentvis utbytte: $\frac{25{,}0\ g}{31{,}3\ g} \times 100\% = \mathbf{80}\ \%$

Oppgave 3

25,0 g vann plasseres i en tom, lukket beholder ved 25°C. Anta at trykket i den tomme beholderen er 0 før tilsetting av vann. Beholderen har et volum på 20,0 L. Beholderen varmes opp til 150°C, og vi antar at alt vann nå er i gassform. Hva er trykket i beholderen?

2,41 atm

2440 Pa

2440 torr

0,866 bar

$$n_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}}$$

$$pV = nRT$$

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{m_{H_2O}RT}{M_{H_2O}V} = \frac{25{,}0\ g\ \times 0{,}082057\ Latm/Kmol\ \times (25 + 273)\ K}{18{,}016\ g/mol \times 20{,}0\ L} = \mathbf{2{,}41\ atm}$$

Oppgave 4

Hvor mange gram $CaCl_2(s)$ trengs for å lage 7,5 L av en 0,330 mol/L $CaCl_2$-løsning?

$2{,}7 \times 10^2$ g

$1{,}4 \times 10^2$ g

$5{,}5 \times 10^2$ g

$2{,}5 \times 10^3$ g

$$n_{CaCl_2} = c \times V = 0{,}330\ mol/L\ \times 7{,}5 L = 2{,}475\ mol$$

$$m_{CaCl_2} = M_{CaCl_2} \times n_{CaCl_2} = 110{,}98\ g/mol\ \times 2{,}475\ mol = \mathbf{2{,}7 \times 10^2\ g}$$

Oppgave 5

Gitt følgende likevektsreaksjon:

(1) $\mathrm{N_2O_4}(g) \leftrightarrow \mathrm{2NO_2}(g)$

i) 2,00 mol dinitrogentetraoksid (N_2O_4) tilsettes en tom beholder på 5,00 L, og beholderen varmes opp til 134°C. Ved likevekt blir konsentrasjonen av nitrogendioksid (NO_2) målt til 0,525 mol/L. Hva er konsentrasjonen av N_2O_4 ved likevekt?

0,1375 mol/L

0,2625 mol/L

0,4000 mol/L

0,525 mol/L

$$[N_2O_4] = \frac{n_{N_2O_4}}{V} = \frac{2{,}00\ mol}{5{,}00\ L} = 0{,}400\ mol/L$$

Setter opp likevektstabell

	$N_2O_4(g)$	$\leftrightarrow 2NO_2(g)$
Ved start	0,400	0
Endring	-x	2x
Ved likevekt	0,400-x	2x = 0,525

$$x = \frac{0{,}525}{2} = 0{,}2625$$

Likevektskonsentrasjon av N_2O_4:

$$[N_2O_4] = 0{,}400 - x = 0{,}400 - 0{,}2625 = \mathbf{0{,}1375\ mol/L}$$

ii) I et annet forsøk ved 773°C tilsettes N_2O_4 til en tom beholder og likevektskonsentrasjonen av N_2O_4 blir målt til 0,0114 mol/L og likevektskonsentrasjonen av NO_2 blir målt til 0,0770 mol/L. Hva blir likevektskonstanten for for likevektsreaksjonen ved 773°C?

0,520

0,148

1,92

6,75

$$K = \frac{[NO_2]^2}{[N_2O_4]} = \frac{0{,}0770^2}{0{,}0114} = \mathbf{0{,}520}$$

iii) I hvilken retning vil likevektsreaksjonen (1) forskyves slik den er skrevet opp i denne oppgaven hvis trykket øker?

Mot venstre

Mot høyre

Ingen forskyvning

Ved økt trykk vil likevekten forskyves i den retningen det er færrest gassmolekyler, og det er mot venstre slik likevektsreaksjonen (1) er skrevet opp.

Oppgave 6

Løselighetstabell (vann) ved 25 °C

U = uløselig. Det løses mindre enn 0,01 g av saltet i 100 g vann.
T = tungtløselig. Det løses mellom 0,01 og 1 g av saltet i 100 g vann.
L = lettløselig. Det løses mer enn 1 g av saltet per 100 g vann.
R = reagerer med vann.
- = Ukjent forbindelse, eller forbindelse dannes ikke ved utfelling.

	Br^-	Cl^-	CO_3^{2-}	CrO_4^{2-}	I^-	O^{2-}	OH^-	S^{2-}	SO_4^{2-}
Ag^+	U	U	U	U	U	U	-	U	T
Al^{3+}	R	R	-	-	R	U	U	R	R
Ba^{2+}	L	L	U	U	L	R	L	T	U
Ca^{2+}	L	L	U	T	L	T	U	T	T
Cu^{2+}	L	L	-	U	-	U	U	U	L
Fe^{2+}	L	L	U	U	L	U	U	U	L
Fe^{3+}	R	R	-	U	-	U	U	U	L
Hg_2^{2+}	U	U	U	U	U	-	U	-	U
Hg^{2+}	T	L	-	U	U	U	U	U	R
Mg^{2+}	L	L	U	L	L	U	U	R	L
Ni^{2+}	L	L	U	U	L	U	U	U	L
Pb^{2+}	T	T	U	U	U	U	U	U	U
Sn^{2+}	R	R	U	-	R	U	U	U	R
Sn^{4+}	R	R	-	L	R	U	U	U	R
Zn^{2+}	L	L	U	U	L	U	U	U	L

Vi ønsker å felle ut det tungtløselige stoffet $BaSO_4$ ved 25°C. Vi har tilgjengelig følgende lettløselige salter i fast form: BaI_2(s), $Ba(OH)_2$(s), $FeSO_4$(s) og $CuSO_4$(s). Hvilke to stoffer er det mest hensiktsmessig å løse i vann for å lage et rent produkt av $BaSO_4$(s).
Bruk tabellen «Løselighetstabell (vann) ved 25°C» i vedlegget for å avgjøre dette.

Det er mest hensiktsmessig å bruke BaI_2(s) og $FeSO_4$(s)

Det er mest hensiktsmessig å bruke BaI_2(s) og $CuSO_4$(s)

Det er mest hensiktsmessig å bruke $Ba(OH)_2$(s) og $FeSO_4$(s)

Det er mest hensiktsmessig å bruke $Ba(OH)_2$(s) og $CuSO_4$(s)

Ingen av alternativene vil gi oss det produktet vi er ute etter.

BaI_2(s) og $FeSO_4$(s) kan føre til utfelling av $BaSO_4$(s), og FeI_2 er lettløselig i følge tabellen. Denne kombinasjonen egner seg derfor.

$BaI_2(s)$ og $CuSO_4(s)$ kan føre til utfelling av $BaSO_4(s)$ og $CuI_2(s)$. Det er oppgitt at løseligheten til $CuI_2(s)$ er ukjent, og denne kombinasjonen egner seg derfor ikke når løseligheten til $CuI_2(s)$ er ukjent.

$Ba(OH)_2(s)$ og $FeSO_4(s)$ kan føre til utfelling av $BaSO_4(s)$ og $Fe(OH)_2(s)$. Begge er uløselige i følge tabellen, og denne kombinasjonen egner seg derfor ikke.

$Ba(OH)_2(s)$ og $CuSO_4(s)$ kan føre til utfelling av $BaSO_4(s)$ og $Cu(OH)_2(s)$. Begge er uløselige i følge tabellen, og denne kombinasjonen egner seg derfor ikke.

ii) Vi ønsker å løse opp så mye $PbCl_2$ i vann som mulig. Hva vil konsentrasjonen av Cl^-ioner være når vi har oppnådd mettet løsning ved 25°C?
Løselighetsproduktet, K_{sp}, for $PbCl_2$: $2,3 \times 10^{-4}$

0,077 mol/L

0,00023 mol/L

0,039 mol/L

0,39 mol/L

$$\mathrm{PbCl_2(s)} \leftrightarrow \mathrm{Pb^{2+}(aq)} + \mathrm{2Cl^-(aq)}$$

Setter opp løselighetstabell:

	$\mathrm{PbCl_2(s)} \leftrightarrow$	$\mathrm{Pb^{2+}(aq)}$	$+\ \mathrm{2Cl^-(aq)}$
Ved start	-	0	0
Endring	-	x	2x
Ved likevekt	-	x	2x

$$K_{sp} = [Pb^{2+}][Cl^-]^2 = x \times (2x)^2 = 2,3 \times 10^{-4}$$

$$4x^3 = 2,3 \times 10^{-4}$$

$$x = \left(\frac{2,3 \times 10^{-4}}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,0386$$

$$[\mathrm{Cl^-}] = 2x = 2 \times 0,0386\ mol/l = \boldsymbol{0,077 mol/L}$$

Oppgave 7

Beregn pH i en $8{,}7 \times 10^{-5}$ M KOH-løsning ved 25°C.

9,94

3,76

4,06

8,63

10,24

KOH er en sterk base: $\mathrm{KOH(aq)} \rightarrow \mathrm{K^+(aq)} + \mathrm{OH^-(aq)}$

$[\mathrm{OH^-}] = [\mathrm{KOH}] = 8{,}7 \times 10^{-5}\ mol/L$

$[H^+][OH^-] = 10^{-14}$

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{8{,}7 \times 10^{-5}} = 1{,}15 \times 10^{-10}\ mol/L$$

$pH = -\log[H^+] = -\log(1{,}15 \times 10^{-10}) = \mathbf{9{,}94}$

Oppgave 8

i) Avgjør om løsningen blir sur, nøytral eller basisk når den ioniske forbindelsen $NaCH_3COO$ løses i vann. Begrunn svaret og vis med reaksjonsligninger.

$$NaCH_3COO(aq) \rightarrow Na^+(aq) + CH_3COO^-(aq)$$

Na^+ påvirker ikke pH

CH_3COO^- er korresponderende base til CH_3COOH:

$$CH_3COO^-(aq) + H_2O(l) \leftrightarrow CH_3COOH(aq) + OH^-(aq)$$

Dette gir en basisk løsning

ii)

Beregn pH i en 0,80 M CH_3COONa-løsning ved 25°C.

$$K_b = \frac{10^{-14}}{K_a} = \frac{10^{-14}}{1,8 \times 10^{-5}} = 5,56 \times 10^{-10}$$

	$CH_3COO^-(aq)$	$+ H_2O(l)$	$\leftrightarrow CH_3COOH(aq)$	$+ OH^-(aq)$
Ved start	0,80	-	0	0
Endring	-x	-	x	x
Ved likevekt	0,80 – x	-	x	x

$$K_b = \frac{[CH_3COOH]\,[OH^-]}{[CH_3COO^-]} = \frac{x^2}{0,80 - x} = 5,56 \times 10^{-10}$$

$x^2 + 5,56 \times 10^{-10}x - 4,45 \times 10^{-10} = 0$

$x = 2,11 \times 10^{-5}$

$[OH^-] = 2,11 \times 10^{-5}\ mol/L$

$[H^+] = \dfrac{10^{-14}}{2,11 \times 10^{-5}} = 4,74 \times 10^{-10}$

$pH = -\log([H^+]) = -\log(4,74 \times 10^{-10}) = 9,32$

$\boldsymbol{pH = 9,32}$

Felles mekanikkdel

Oppgave 9

Definisjonen av gjennomsnittsfart som

$$\overline{v} = \frac{\text{tilbakelangt strekning}}{\text{tid}},$$

og dessuten at ved kontant fart v er tiden t gitt ved

$$t = \frac{s}{v},$$

gir at

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \frac{50\,\text{km} + 160\,\text{km}}{\frac{50\,\text{km}}{50\,\text{km/h}} + \frac{160\,\text{km}}{80\,\text{km/h}}} \\ &= \frac{210\,\text{km}}{3\,\text{h}} \\ &= \underline{\underline{70\,\text{km/h}}}\end{aligned}$$

Oppgave 10

La kulas posisjon være $y_1$ved $t = \Delta t$, og y_2 ved $t = 2\Delta t$. Ettersom kula starter i ro i $y_0 = 0$ ved $t = 0$ får vi

$$\begin{aligned}\Delta y_1 &= y_1 - y_0 \\ &= \underline{\frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2}\end{aligned}$$

I det neste tidsintervallet faller kula en strekning Δy_2 som blir

$$\begin{aligned}\Delta y_2 &= y_2 - y_1 \\ &= \frac{1}{2} g\,(2\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2 \\ &= \underline{3 \cdot \frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2}\end{aligned}$$

Dette gir at

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2}{\frac{1}{2} g\,(\Delta t)^2} = \underline{\underline{3}}$$

Oppgave 11

i) I det høyeste punktet i banen er farten $\vec{v}$ horisontal ($v_y = 0$), sånn at farten i det høyste punktet blir lik horisontalkomponenten v_{0x} av startfarten:

$$\begin{aligned}v &= v_{0x} \\ &= v_0 \cos\alpha \\ &= 10\,\text{m/s} \cdot \cos 25^\circ \\ &= \underline{\underline{8,2\,\text{m/s}}}\end{aligned}$$

ii) Finner først falltiden t (velger positiv retning oppover):

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y &= v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ -1,0 &= 10 \sin 35^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 \end{aligned} \qquad \text{(Sløyfer enheter)}$$

Denne andregradslikninga har løsningen

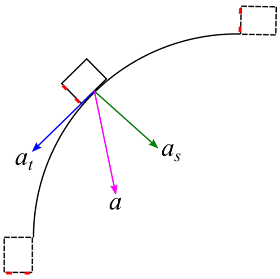
$$t = 1,32\,\mathrm{s},$$

som gir at

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ &= v_0 \cos\alpha \cdot t \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \cos 35^\circ \cdot 1,32\,\mathrm{s} \\ &= 10,8\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{11\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

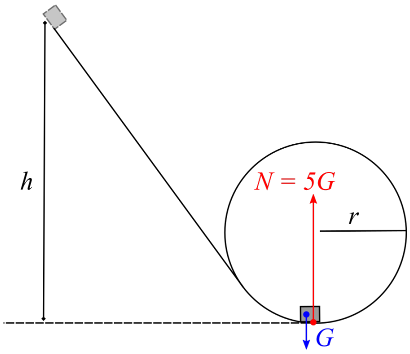
Figuren under viser komponentene til akselerasjonen $\vec{a}$ for bilen idet den kjører gjennom svingen med avtakende banefart: sentripetalakselerasjonen $\vec{a}_r$ (pga. sirkelbevegelsen) og tangentialakselerasjonen $\vec{a}_t$, fordi banefarten avtar.



Akselerasjonen får altså retningen vist på figuren.

Oppgave 13

Skal bestemme den største høyden h vogna kan slippes fra for at normalkrafta i det laveste punktet skal bli maksimalt $5G$, slik figuren under viser.



I det laveste punktet gir Newtons 2. lov følgende restriksjon på farten v i det laveste punktet:

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ N - G &= m\frac{v^2}{r} \\ 5G - G &= m\frac{v^2}{r} && \text{(Grensetilfellet)} \\ 4mg &= m\frac{v^2}{r} \\ v^2 &= \underline{4gr} \end{aligned}$$

Energibevaring mellom slippunktet i høyde h og det laveste punktet gir

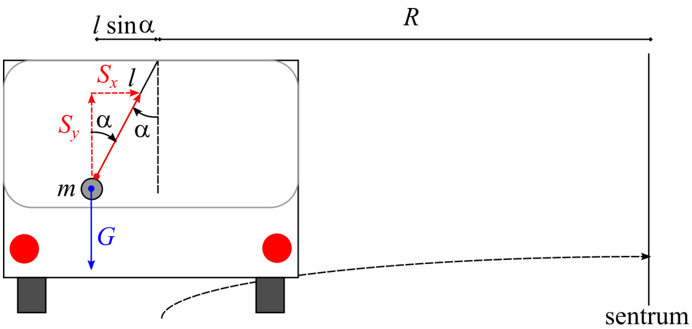
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \underline{2gh}$$

Sammeholdt gir dette følgende verdi for den maksimale slipphøyden h:

$$4gr = 2gh \Rightarrow h = \underline{\underline{2r}}$$

Oppgave 14

Figuren under viser kreftene som virker på kula som henger i snora: snordraget S og tyngden G.



Kula er i ro i vertikalretningen, sånn at

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ S_y &= mg \end{aligned}$$

Newtons 2. lov i x-retningen gir

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma \\ S_x &= \underline{m\frac{v^2}{r}}, \end{aligned}$$

der $r = R + l\sin\alpha$ (som er radiusen for kulas sirkelbevegelse). Sammenhengen mellom S_x og S_y vises fra figuren:

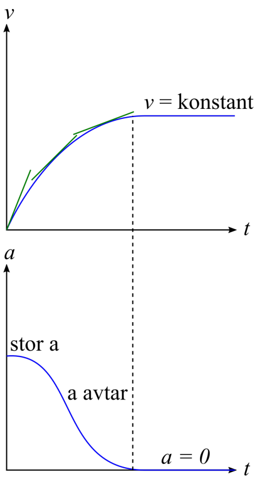
$$\begin{aligned} S_x &= S_y \tan\alpha \\ &= \underline{mg\tan\alpha} && \text{(Ettersom } S_y = mg\text{)} \end{aligned}$$

Kombinerer dette og får

$$\begin{aligned}
S_x &= m\frac{v^2}{r} \\
mg\tan\alpha &= m\frac{v^2}{r} \\
v^2 &= gr\tan\alpha \\
v &= \sqrt{gr\tan\alpha} \\
&= \underline{\underline{\sqrt{g\left(R + l\sin\alpha\right)\tan\alpha}}}
\end{aligned}$$

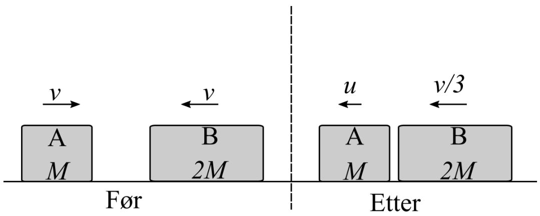
Oppgave 15

Akselerasjonen på et tidspunkt er stigningstallet til fartsgrafen. Bilens fartsgraf viser at bilen starter med full gass og stor akselerasjon (grafen stiger bratt i starten), og så avtar farten mer og mer til den når en maksimalfart. Figuren under viser hvilken graf som er i tråd med denne situasjonen.



Oppgave 16

Figuren under viser kollisjonen:



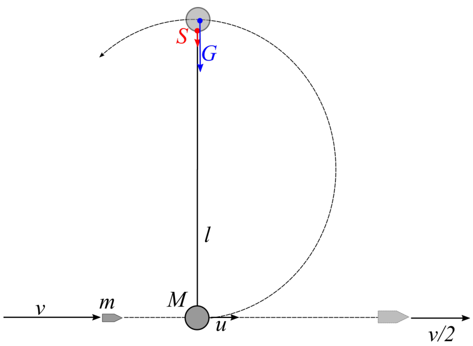
Skal finne sluttfarten u til den letteste steinen. Bevaring av bevegelsesmengde gir (velger positiv retning mot høyre):

$$\begin{aligned}
\sum p_{f\phi r} &= \sum p_{etter} \\
Mv + 2M\left(-v\right) &= Mu + 2M \cdot \left(-\frac{v}{3}\right) \\
-Mv &= Mu - \frac{2}{3}Mv \\
-v &= u - \frac{2}{3}v \\
u &= -v + \frac{2}{3}v \\
u &= \underline{\underline{-\frac{v}{3}}}
\end{aligned}$$

Minustegnet signaliserer at steinen beveger seg mot venstre.

Oppgave 17

Figuren under viser situasjonen når prosjektilet treffer pendelkula, som svinger gjennom en hel sirkel:



Pendelkula får farten u etter støtet med prosjektilet. Her er bevegelsesmengden bevart:

$$\begin{aligned}
\sum p_{f\phi r} &= \sum p_{etter} \\
mv &= m \cdot \frac{v}{2} + Mu \\
u &= \frac{mv - \frac{1}{2}mv}{M} \\
u &= \underline{\frac{m}{2M}v}
\end{aligned}$$

I tilfellet der kula akkurat fullfører en hel sirkel, er snordraget på toppen lik null. Hvis u_t er farten til kula på toppen, gir Newtons 2. lov

$$\begin{aligned}
S + G &= m\frac{u_t^2}{l} && \text{(Radius er } l\text{)} \\
mg &= m\frac{u_t^2}{l} && \text{(Når } S = 0\text{)} \\
u_t^2 &= \underline{gl}
\end{aligned}$$

Energibevaring for pendelkula mellom punktet like etter kollisjonen, og toppunktet gir da:

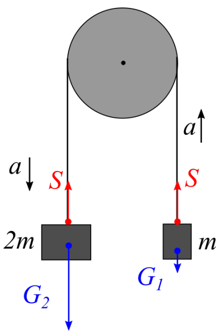
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}Mu^2 &= Mgh + \frac{1}{2}Mu_t^2 && \text{(Her er } h = 2l\text{)}\\
\frac{1}{2}Mu^2 &= Mg\cdot 2l + \frac{1}{2}M\cdot gl\\
\frac{1}{2}u^2 &= \frac{5}{2}gl\\
u^2 &= \underline{5gl}
\end{aligned}$$

Dette gir følgende betingelse på farten v for prosjektilet for at pendelkula skal fullføre en hel sirkel:

$$\begin{aligned}
u^2 &= 5gl\\
\left(\frac{m}{2M}v\right)^2 &= 5gl && \text{(Fra bevaring av bev. mengde)}\\
\frac{m}{2M}v &= \sqrt{5gl}\\
v &= \underline{\underline{2\frac{M}{m}\sqrt{5gl}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 18

i) Figuren under viser kreftene på loddene i situasjonen der trinsa og snora begge er masseløse:



Det samme snordraget S virker i hver ende av den masseløse snora, i tillegg til tyngdene $G_1 = mg$ og $G_2 = 2mg$ på hver kloss. Absoluttverdien til akselerasjonen til klossene vil være den samme, så Newtons 2. lov på hver kloss gir:

$$\begin{aligned}
\sum F_1 &= ma\\
S - G_1 &= ma\\
S - mg &= ma \Rightarrow S = \underline{ma + mg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum F_2 &= 2m\cdot a\\
G_2 - S &= 2m\cdot a\\
2mg - S &= 2m\cdot a
\end{aligned}$$

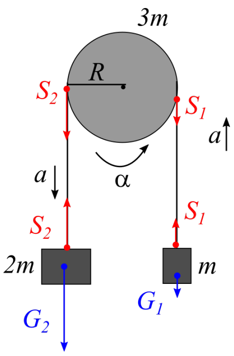
Kombinerer disse to likningene ved å sette inn for S:

$$\begin{aligned} 2mg - S &= 2m \cdot a \\ 2mg - (ma + mg) &= 2ma \\ 2mg - ma - mg &= 2ma \\ 3ma &= mg \\ a &= \underline{\underline{\frac{g}{3}}} \end{aligned}$$

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 5 poeng):

- Figur med inntegnede krefter på klossene (1 poeng)
- Sette opp Newtons 2. lov på hver av de to klossene (2 poeng)
- Kombinere likningene for klossene og finne akselerasjonen (2 poeng)

ii) Figuren under viser situasjonen der trinsa har masse $3m$ og radius r:



Nå virker det forskjellige snordrag S_1 og S_2 i hver ende av den masseløse snora. Newtons 2. lov på hver kloss gir:

$$\begin{aligned} \sum F_1 &= ma \\ S_1 - G_1 &= ma \\ S_1 - mg &= ma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_2 &= 2m \cdot a \\ G_2 - S_2 &= 2m \cdot a \\ 2mg - S_2 &= 2ma \end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon anvendt på trinsa, som har treghetsmoment I om rotasjonsaksen og får en vinkelaks. α:

$$\begin{aligned} \sum \tau &= I\alpha \\ S_2R - S_1R &= I\alpha \end{aligned}$$

Ettersom snora ikke glir på trinsa, må klossenes akselersjon a tilsvare den lineære akselerasjonen til et punkt på periferien til trinsa, dvs.

$$a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}.$$

Dette gir:

$$\begin{aligned}
S_2R - S_1R &= I \cdot \frac{a}{R} \\
S_2R - S_1R &= \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot R^2 \cdot \frac{a}{R} && \text{(Treghetsmoment for massiv skive)} \\
S_2 - S_1 &= \frac{3}{2}ma && \text{(Forkorter } R\text{)}
\end{aligned}$$

Bruker addisjonsmetoden til å løse likningssettet som var resultatet av Newtons 2. lov på de to klossene:

$$\begin{aligned}
S_1 - mg &= ma \\
2mg - S_2 &= 2ma
\end{aligned}$$

Adderer rad 1 til rad 2:

$$\begin{aligned}
2mg - S_2 + S_1 - mg &= 2ma + ma \\
mg - (S_2 - S_1) &= 3ma \\
mg - \frac{3}{2}ma &= 3ma && \text{(Setter inn fra rotasjonsdel)} \\
3ma + \frac{3}{2}ma &= mg \\
\frac{9}{2}ma &= mg \\
a &= \underline{\underline{\frac{2}{9}g}}
\end{aligned}$$

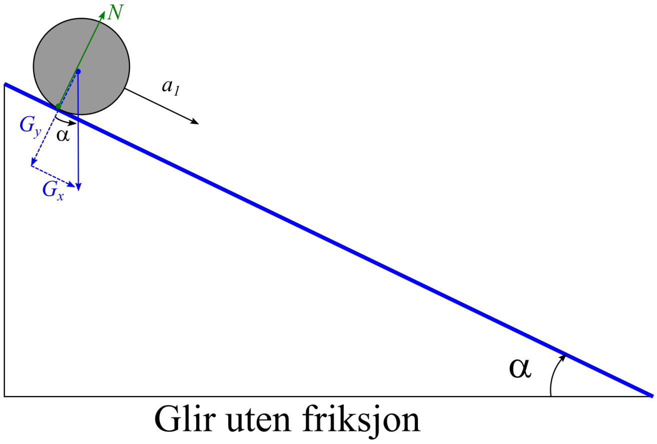
Akselerasjonen blir lavere enn i tilfelle i), som forventet.

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 5 poeng):

- Figur med inntegnede krefter på klossene og trinsa (1 poeng)
- Sette opp Newtons 2. lov på hver av de to klossene og trinsa (2 poeng)
- Kombinere likningene og finne akselerasjonen (2 poeng)

Oppgave 19

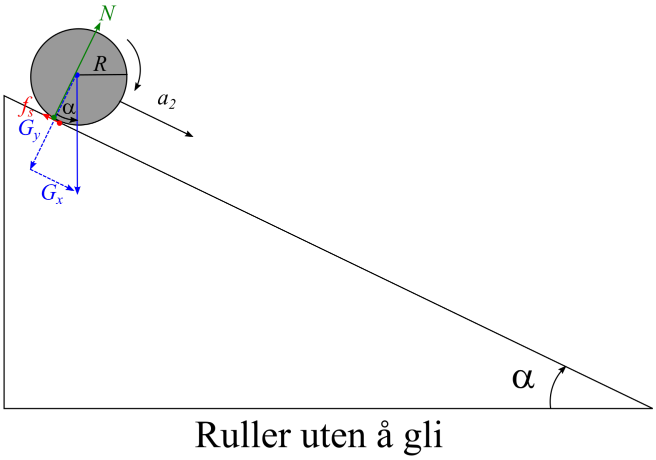
i) Figuren under viser kreftene som virker på sylinderen når den glir nedover et skråplan uten friksjon:



Kun komponenten G_x til tyngden virker langs skråplanet; Newtons 2. lov i denne retningen gir da

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_1 \\ mg\sin\alpha &= ma_1 \\ a_1 &= \underline{\underline{g\sin\alpha}}\end{aligned}$$

ii) I dette tilfellet virker det en friksjonskraft f_s mellom sylinderen og underlaget (det er denne som sørger for at sylinderen ruller), som vist på figuren under:



I dette tilfellet gir Newtons 2. lov for bevegelsen til massesenteret at

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_2 \\ mg\sin\alpha - f_s &= ma_2\end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon gir sammenhengen (her er I treghetsmomentet til sylinderen om massesenteret):

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ f_s \cdot R &= I\alpha\end{aligned}$$

Ettersom sylinderen ruller uten å gli, er sammenhengen mellom massesenterets akselerasjon a_2 og vinkelakselerasjonen gitt ved

$$a_2 = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_2}{R}$$

Dette gir

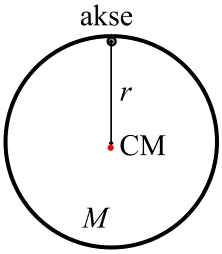
$$\begin{aligned}f_s \cdot R &= I \cdot \frac{a_2}{R} \\ f_s \cdot R &= \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a_2}{R} && \text{(Treghetsm. for sylinder)} \\ f_s &= \frac{1}{2}ma_2\end{aligned}$$

Innsatt i den andre likninga:

$$\begin{aligned}mg\sin\alpha - f_s &= ma_2 \\ mg\sin\alpha - \frac{1}{2}ma &= ma_2 \\ \frac{3}{2}ma_2 &= mg\sin\alpha \\ a_2 &= \underline{\frac{2}{3}g\sin\alpha}\end{aligned}$$

Oppgave 20

Figuren under viser ringen med rotasjonsaksen ved kanten av ringen (en “ring” er pr. definisjon uendelig tynn, og har bare én radius - i motsetning til “hul sylinder”, som har indre/ytre radius).

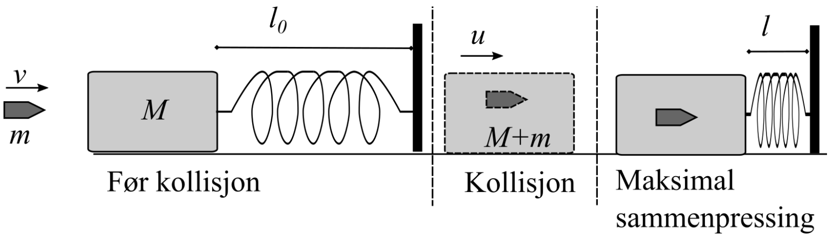


Bruker Steiners sats til å bestemme treghetsmomentet I om aksen: hvis I_{CM} er treghetsmomentet om massesenteret (sentrum) og $d = r$ er avstanden mellom massesenter og akse, får vi

$$\begin{aligned} I &= I_{CM} + Md^2 \\ &= Mr^2 + Mr^2 \\ &= \underline{\underline{2Mr^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 21

i) Figuren under viser situasjonen der kula treffer klossen, og fjæra sammenpresses maksimalt:



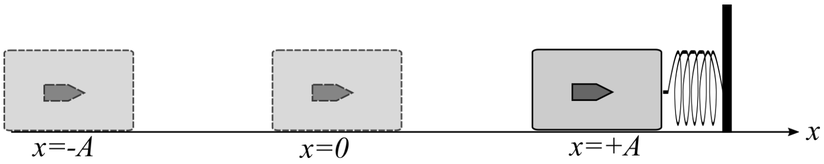
Farten til kule + kloss etter kollisjonen er u. Finner u fra bevaring av bevegelsesmengde, når kollisjonen er fullstendig uelastisk (legemene sitter sammen etterpå):

$$\begin{aligned} \sum p_{før} &= \sum p_{etter} \\ mv &= (M+m)\,u \\ u &= \underline{\frac{m}{M+m}v} \end{aligned}$$

Den maksimale sammenpressingen $x = l - l_0$ av fjæra finner vi fra energibevaring: kinetisk energi for kule + kloss går over til potensiell energi i fjæra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M+m)\,u^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\ x &= \sqrt{\frac{M+m}{k}u^2} \\ &= \sqrt{\frac{M+m}{k}\cdot\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{k}\frac{m^2}{M+m}v^2}}} \end{aligned}$$

ii) Figuren under viser situasjonen der klossen utfører frie svingninger mellom ytterpunktene $x = \pm A$:



Utslaget $x(t)$ fra likevektsstillingen $x = 0$ for en slik svingning er gitt ved

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \\ &= A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\cdot t + \phi\right) \qquad (\omega \text{ for fri, udempet svingning}) \end{aligned}$$

Ettersom klossen befinner seg i $x = +A$ ved $t = 0$, skal må faseforskyvningen ϕ være bestemt av

$$\begin{aligned} x(0) &= A \\ A\cos\phi &= A \\ \cos\phi &= 1 \end{aligned}$$

Vinkelen $\phi = 0$ oppfyller denne betingelsen, slik at utslaget blir

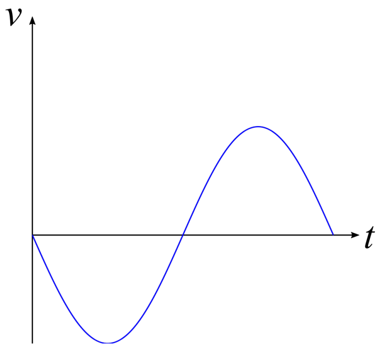
$$x(t) = \underline{\underline{A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\cdot t\right)}}$$

Oppgave 22

En kloss er festet til en fjær, og kan svinge uten friksjon på et horisontalt underlag. Klossen dras ut til et maksimalt utslag og slippes med null startfart ved $t = 0$. Vi skal bestemme formen for fartsgrafen til klossen.

En slik svingning blir lik den fra forrige oppgave, dvs. $x(t) = A\cos(\omega t)$. Vi kan så klart finne $v_x = x'(t) = -A\omega\sin\omega t$ og tegne grafen til denne, men er raskt resonnement er like greit: fartsgrafen får form som en cosinus/sinus. Etter at klossen slippes fra $x = +A$ med null startfart, vil farten være negativ (klossen dras i negativ x-retning), før den stanser opp i endepunktet $x = +A$, og farten igjen blir positiv.

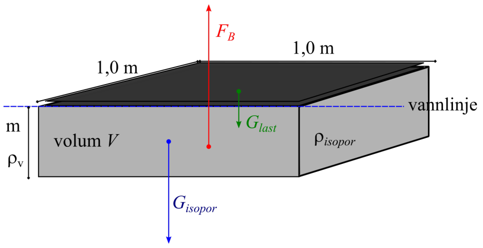
Figuren under viser den eneste fartsgrafen som er i tråd med dette resonnementet:



Fluidmekanikk- og bølgefysikkdel

Oppgave 23

Figuren under viser situasjonen når isflaket bærer maksimal last, og oversiden ligger helt i vannlinjen:



Kreftene som virker er tyngden G_{isopor} av isoporflaket; tyngden G_{last} av lasten og oppdriften F_B.

Newtons 1. lov gir

$$\sum F = 0$$
$$F_B = G_{isopor} + G_{last}$$

Oppdriften er gitt ved Arkimedes' lov:

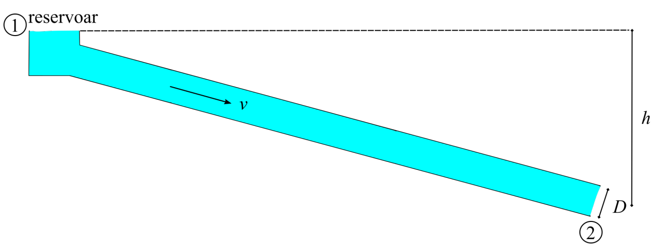
$$F_B = \rho_v V_{fl} g,$$

der ρ_v er massetettheten til vann, og V_{fl} er det fortrengte væskevolumet, som i dette tilfellet tilsvarer volumet av hele isflaket; $V_{fl} = V$. Kombinerer dette og finner den maksimale lasten flaket kan være:

$$\begin{aligned}
G_{last} &= F_B - G_{isopor} \\
m_{last} g &= \rho_v V g - m_{isopor} g \\
m_{last} &= \rho_v V - m_{isopor} && \text{(Forkorter } g\text{)} \\
m_{last} &= \rho_v V - \rho_{isopor} V && \text{(Definisjon av tetthet)} \\
&= (\rho_v - \rho_{isopor})\, V \\
&= (\rho_v - \rho_{isopor})\, V \\
&= \left(1,0 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 - 40\,\text{kg/m}^3\right) \cdot 1,0\,\text{m} \cdot 1,0\,\text{m} \cdot 0,20\,\text{m} \\
&= 192\,\text{kg} \\
&= \underline{\underline{1,9 \cdot 10^2\,\text{kg}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 24

i) Figuren under viser en skisse av mikrokraftverket:



Bernoullis likning mellom punkt 1 (vannspeilet i reservoaret) og punkt 2 (rørutløpet):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Noen forenklinger: vi kan sette $p_1 = p_2$ (luft ved begge punkter), $v_1 \approx 0$ (vannspeilet har mye større tverrsnitt enn røret, og vil derfor sige veldig sakte nedover), $y_2 = 0$ (velger nullnivå her), $y_1 = h$. Dette gir:

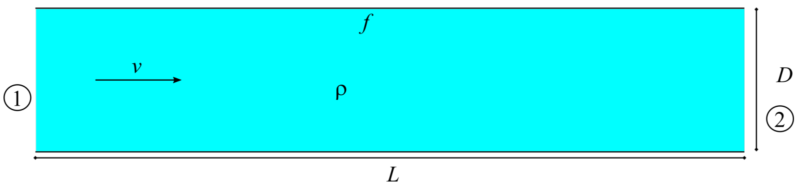
$$\begin{aligned}
\rho g h &= \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\
v_2 &= \sqrt{2gh} && \text{(Torricellis lov)} \\
&= \sqrt{2 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2,0\,\mathrm{m}} \\
&\approx \underline{\underline{6,3\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}$$

ii) Maksimal effekt som kan hentes ut av turbinen finner vi fra et enkelt energiresonnement: i det "maksimale" tilfellet vil all kinetisk energi i vannet tilføres turbinen. Dvs. effekten som tilføres turbinen dersom væskefarten er v og rørtverrsnittet er $A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$ blir

$$\begin{aligned}
P_{max} &= \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{kinetisk energi pr. volum}} \cdot \underbrace{Q}_{\text{volumstrøm}} \\
&= \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot Av && \text{(Def. av volumstrøm)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (5,0\,\mathrm{m/s})^2 \cdot \pi \left(\frac{0,40\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 \cdot 5,0\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{7,9\,\mathrm{kW}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 25

i) Figuren under viser et horisontalt vannrør med punkter 1 og 2 i hver ende av røret:



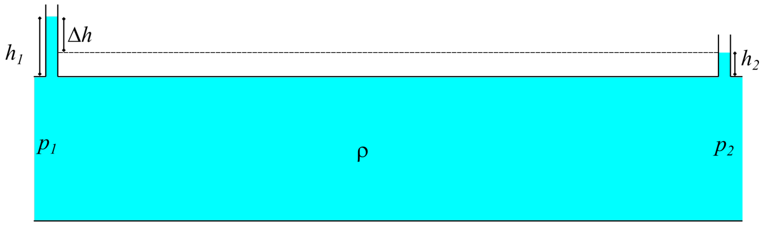
Bernoullis likning med tapsledd mellom de to endene av røret (kun ett tapsledd h_f på grunn av rørfriksjonen):

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + y_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + y_2 + h_f$$

Forenklinger: ettersom røret er horisontalt er $y_1 = y_2$, og fordi tverrsnittet er konstant, er $v_1 = v_2 = v$. Dette gir:

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{\rho h} - \frac{p_2}{\rho g} &= h_f \\
p_1 - p_2 &= \rho g h_f \\
&= \rho g \cdot f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} && \text{(Tapsledd fra formelark)} \\
&= \underline{\underline{f\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho v^2}}
\end{aligned}$$

ii) Figuren under viser vannrøret med de to vannsøylene som kommer opp fra røret:



Væsketrykket p_1 må tilsvare trykket fra væskesøyla (pluss eventuelt lufttrykk på utsiden) rett over dette punktet, dvs.

$$p_1 = \rho g h_1 + p_0$$

Tilsvarende blir

$$p_2 = \rho g h_2 + p_0$$

Trykkforskjellen blir

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \rho g h_1 + p_0 - (\rho g h_2 + p_0) \\ &= \rho g (h_1 - h_2) \\ &= \underline{\rho g \Delta h} \end{aligned}$$

Dette gir at høydeforskjellen blir

$$\Delta h = \underline{\underline{\frac{p_1 - p_2}{\rho g}}}$$

Oppgave 26

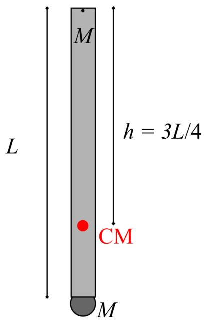
i) Her dreier det seg om to ulike matematiske pendler, dvs. en punktmasse opphengt i en masseløs snor med lengde L. Perioden T til en matematisk pendel for små utslag er gitt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Merk at perioden er uavhengig av massen. Hvis T_1 er perioden til en pendel med lengde L, og T_2 periode for en pendel med lengde $L/2$, blir forholdet lik

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{2\pi\sqrt{\frac{\frac{L}{2}}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \end{aligned}$$

ii) Figuren under viser den fysiske pendelen:



Perioden til en fysisk pendel er gitt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}},$$

der m er total masse for pendelen, I er treghetsmomentet om opphengingspunktet og h er avstanden mellom massesenteret (CM) og opphengingspunktet.

Det totale treghetsmomentet for pendelen blir

$$\begin{aligned} I &= I_{stang} + I_{punktmasse} \\ &= \frac{1}{3}ML^2 + ML^2 && \text{(Treghetsm. for punktmasse fra formelark)} \\ &= \underline{\frac{4}{3}ML^2} \end{aligned}$$

Ettersom avstanden $h = \frac{3}{4}L$, gir dette at

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{2Mgh}} && \text{(Total masse er } 2M\text{)} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}ML^2}{2Mg\cdot\frac{3}{4}L}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{L}{g}} \\ &= \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{8}{9}\frac{L}{g}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 27

Et system av et lodd som svinger vertikalt i en fjær utsettes for en ytre kraft $F_0 \sin\omega t$, og to forskjellige vinkelfrekvenser $\omega_1 = 2\omega_0$ og $\omega_2 = 4\omega_0$ gir opphav til 2 forskjellige amplituder, hhv. A_1 og A_2. Amplituden for en slik udempet, tvungen svingning som funksjon av vinkelfrekvensen til den ytre krafta er gitt ved

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + b^2\omega^2}}.$$

Her er $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (vinkelfrekvens for fri, udempet svingning), og dempingskonstanten $b = 0$, slik at uttrykket for amplituden blir

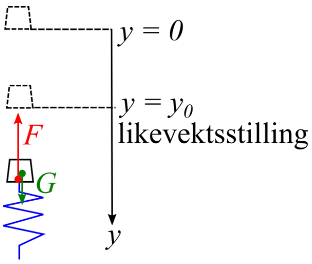
$$A = \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}$$

Forholdene mellom amplitudene blir

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{A_2} &= \frac{\frac{F_0}{m(\omega_1^2-\omega_0^2)}}{\frac{F_0}{m(\omega_2^2-\omega_0^2)}} \\ &= \frac{\omega_2^2-\omega_0^2}{\omega_1^2-\omega_0^2} && \text{(Forkorter)} \\ &= \frac{(4\omega_0)^2-\omega_0^2}{(2\omega_0)^2-\omega_0^2} \\ &= \frac{15\omega_0^2}{3\omega_0^2} \\ &= \underline{\underline{5}}\end{aligned}$$

Oppgave 28

i) Figuren under viser kreftene som virker på landingsfartøyet med masse m som sitter oppå en fjær med fjærkonstant k:



Fjærkrafta $F = ky$ og tyngden $G = mg$ virker på fartøyet. Newtons 2. lov i et punkt der fjæra er komprimert en strekning y fra likevektsstillingen:

$$\begin{aligned}G - F &= ma \\ mg - ky &= ma \\ mg - ky &= m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y &= g\end{aligned}$$

Dette er en 2. ordens differensiallikning for utslaget y **fra ubelastet fjær**, som har både en homogen løsning og en partikulærløsning. Partikulærløsningen vil vise seg å være lik likevektsposisjonen y_0, som tilsvarer punktet der landingsfartøyet står i ro og fjæra er sammenpresset av landingsfartøyets tyngde, dvs. svingeløsningen er[1]

$$y = A\cos(\omega_0 t + \phi) + y_0,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ved å omdefinere y til å angi utslaget fra likevektsstillingen (og ikke ubelastet fjær; $y = 0$), vi får

$$\begin{aligned}y - y_0 &= A\cos(\omega_0 t + \phi) \\ y &= A\cos(\omega_0 t + \phi) && \text{(Har omdefinert } y \text{ slik at } 'y' = y - y_0)\end{aligned}$$

[1] Å angi denne løsningen er ikke påkrevet for full uttelling på oppgaven, den tas med her kun for kompletthetens skyld.

Differensiallikningen her blir da

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= -\omega_0^2 y \\ &= -\frac{k}{m}y.\end{aligned}$$

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 3 poeng):

- Forklaring på hvorfor differensiallikningen får den oppgitte formen, med referanse til Newtons 2. lov og hvorfor tyngdekraften "forsvinner" når man omdefinerer y (2 poeng)
- Forklaring av symbolene som inngår i likninga: y er utslag fra likevekt; m er fartøyets masse og k er fjærkonstanten (1 poeng)

ii) Med demperen frakoblet vil fartøyet foreta frie, udempede svingninger med periode (fra formelarket)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Vi bestemmer fjærkonstanten k ut i fra opplysning om at fjæra presses sammen en avstand $\Delta y = 0,50\,\mathrm{m}$ når fartøyet står i ro på Månen der tyngdeakselerasjonen er $g_m = 1,6\,\mathrm{m/s^2}$. Når fartøyet står i ro med sammenpresset fjær, er fjærkraft $F = k\Delta y$ lik tyngde $G = mg$ og

$$\begin{aligned}k\Delta y = mg_m \Rightarrow k &= \frac{mg_m}{\Delta y} \\ k &= \frac{1,5\cdot 10^4\,\mathrm{kg}\cdot 1,6\,\mathrm{m/s^2}}{0,50\,\mathrm{m}} \\ &= \underline{4,8\cdot 10^4\,\mathrm{N/m}}\end{aligned}$$

Da er perioden lik

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{1,5\cdot 10^4\,\mathrm{kg}}{4,8\cdot 10^4\,\mathrm{N/m}}} \\ &= 3,51\,\mathrm{s} \\ &\approx \underline{\underline{3,5\,\mathrm{s}}}\end{aligned}$$

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 2 poeng):

- Utregning av fjærkonstanten k som trengs for å kunne finne perioden (1 poeng)
- Utregning av perioden T (1 poeng)

iii) Med en dempingskonstant $b = 4,8\cdot 10^4\,\mathrm{kg/s}$ skal vi avgjøre hvorvidt dempingen er kritisk, overkritisk eller underkritisk. Den bestemmende størrelsen for dette er (fra formelarket)

$$\begin{aligned}\frac{b}{2m} &= \frac{4,8\cdot 10^4\,\mathrm{kg/s}}{2\cdot 1,5\cdot 10^4\,\mathrm{kg}} \\ &= \underline{1,6\,\mathrm{s^{-1}}}\end{aligned}$$

Vi skal sammenlikne denne størrelsen med vinkelfrekvensen for det udempede systemet, ω_0:

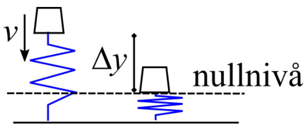
$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{4,8 \cdot 10^4\,\mathrm{N/m}}{1,5 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}}} \\ &= 1,79\,\mathrm{s}^{-1} \\ &\approx \underline{1,8\,\mathrm{s}^{-1}}\end{aligned}$$

Ettersom $\frac{b}{2m} < \omega_0$, er systemet **underkritisk dempet**.

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 2 poeng):

- Utregning av størrelsen $\frac{b}{2m}$ (1 poeng)
- Sammenlikning med vinkelfrekvens for udempet system, ω_0 (1 poeng)

iv) Figuren under viser landingsfartøyet under nedslaget, der fjæra komprimeres en vertikal avstand $\Delta y = 3,0\,\mathrm{m}$:



Hvis vi velger nullnivå for potensiell energi i tyngdefeltet i det laveste punktet (maksimalt sammenpresset fjær), får vi følgende energiregnskap (potensiell + kinetisk energi ved nedslaget går over til potensiell energi i fjæra) som bestemmer den maksimale farten v som landingsfartøyet kan ha i nedslaget:

$$mg\Delta y + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\,(\Delta y)^2 \qquad \text{(Her er } g \text{ tyngdeaks. på Mars)}$$

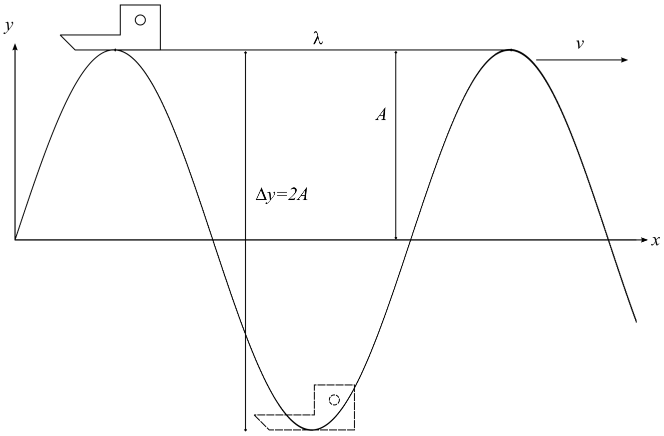
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}k\,(\Delta y)^2 - mg\Delta y \\ v^2 &= \frac{k}{m}\,(\Delta y)^2 - 2g\Delta y \\ v &= \sqrt{\frac{k}{m}\,(\Delta y)^2 - 2g\Delta y} \\ &= \sqrt{\frac{4,8 \cdot 10^4\,\mathrm{N/m}}{1,5 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}} \cdot (3,0\,\mathrm{m})^2 - 2 \cdot 3,7\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3,0\,\mathrm{m}} \\ &= 2,57\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{2,6\,\mathrm{m/s}}}\end{aligned}$$

Krav til full uttelling på oppgaven (maks. 3 poeng):

- Resonnement/plan for løsning, f.eks. energiregnskap eller energi-arbeid-teoremet (2 poeng)
- Utregning av maksimal fart ut i fra resonnement (1 poeng)

Oppgave 29

Figuren under viser båten som rir på bølgene:



Bølgeutslaget for bølger som beveger seg mot høyre er generelt på formen

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\sin(kx-\omega t+\phi) \\ &= A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi}{T}t+\phi\right). \end{aligned}$$

Faseforskyvningen ϕ bestemmes ut fra startbetingelsene; her er det spesifisert at $y(0,0) = A$ (båten er i en bølgetopp ved $t = 0$ og $x = 0$), sånn at faseforskyvningen bestemmes fra

$$\begin{aligned} y(0,0) &= A \\ A\sin\phi &= A \\ \sin\phi &= 1 \end{aligned}$$

Her kan vi velge $\phi = \frac{\pi}{2}$. Bølgelengde λ for bølgen er gitt fra bølgefarten v og perioden T ved

$$\begin{aligned} v &= \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT \\ \lambda &= 5,0\,\mathrm{m/s}\cdot 10\,\mathrm{s} \\ &= \underline{50\,\mathrm{m}} \end{aligned}$$

Det gir, med en oppgitt amplitude på $A = \frac{\Delta y}{2} = \frac{10\,\mathrm{m}}{2} = 5,0\,\mathrm{m}$:

$$\begin{aligned} y(x,y) &= A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi}{T}t+\phi\right) \\ &= 5,0\,\mathrm{m}\sin\left(\frac{2\pi}{50\,\mathrm{m}}x-\frac{2\pi}{10\,\mathrm{s}}t+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{5,0\,\mathrm{m}\sin\left(\frac{2\pi}{50}\,\mathrm{m}^{-1}\cdot x-\frac{2\pi}{10}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)}} \end{aligned}$$

ii) Farten i y-retning, dvs. farten som båten har i vertikalretningen, er generelt gitt ved

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx-\omega t+\phi)\right) \\ &= A\cdot\cos(kx-\omega t+\phi)\cdot(-\omega) && \text{(Kjerneregelen)} \\ &= \underline{-A\omega\cos(kx-\omega t+\phi)} \end{aligned}$$

Den maksimale verdien av v_y inntreffer når cosinusfaktoren er lik 1, dvs.

$$\begin{aligned} v_{y,max} &= A\omega \\ &= 5,0\,\mathrm{m} \cdot \frac{2\pi}{10}\,\mathrm{s}^{-1} \\ &= \underline{\underline{\pi\,\mathrm{s}^{-1}}} \end{aligned}$$

Oppgave 30

i) Frekvensen til n. ordens stående bølge på en streng med bølgefart v, lengde L og grunnfrekvens f_1(dvs. frekvensen til 1. ordens stående bølge) er gitt ved

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2L} = n \cdot f_1$$

Dette viser at differansen i frekvens mellom to etterfølgende ordener er

$$f_{n+1} - f_n = (n+1)\,f_1 - nf_1 = f_1 \Rightarrow f_{n+1} = f_n + f_1$$

Altså: differansen mellom frekvensen til to påfølgende ordener er lik grunnfrekvensen f_1,og frekvensen til neste orden er lik gjeldende orden pluss grunnfrekvensen. Med de oppgitte tallene:

$$\begin{aligned} f_1 &= 659,28\,\mathrm{Hz} - 576,87\,\mathrm{Hz} \\ &= \underline{82,41\,\mathrm{Hz}} \end{aligned}$$

Den neste stående bølgen etter 659,28 Hz oppstår da ved frekvensen

$$\begin{aligned} f &= 659,28\,\mathrm{Hz} + 82,41\,\mathrm{Hz} \\ &= \underline{\underline{741,69\,\mathrm{Hz}}} \end{aligned}$$

ii) Bølgefarten på en streng med lineær massetetthet $\mu = m/L$ og snorstramming (“tension”) F_T er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}.$$

Vi skal bestemme snorstrammingen slik at grunnfrekvensen for strengen får en bestemt verdi f_1. Fra før er

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{v}{2L} \\ &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} &= 2Lf_1 \\ \frac{F_T}{\mu} &= (2Lf_1)^2 \\ F_T &= \mu \cdot (2Lf_1)^2 \\ &= \frac{m}{L}\,(2Lf_1)^2 \end{aligned}$$

Setter inn:

$$
\begin{aligned}
F_T &= \frac{0,73 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{0,64\,\mathrm{m}} \cdot (2 \cdot 0,64\,\mathrm{m} \cdot 196\,\mathrm{Hz}) \\
&= 71,8\,\mathrm{Hz} \\
&\approx \underline{\underline{72\,\mathrm{Hz}}}
\end{aligned}
$$