Løsningsforslag kjemidel eksamen

IFYKJ Fysikk/kjemi

kont 2020

Oppgave 1

Hvor mange protoner har et aluminium-atom i kjernen?

13

Hvor mange elektroner har et aluminium-atom i ytterste skall?

3

Hvor mange protoner og nøytroner har ${}^{19}_{9}\mathrm{F}$?

19

Hvilken binding er det mellom Al og F i AlF_3?

Ionebinding

Upolar kovalent binding

Polar kovalent binding

Metallbinding

Binding mellom metall og ikke-metall: ionebinding.

$\Delta EN = EN(\mathrm{F}) - EN(\mathrm{Al}) = \ 4{,}0 - 1{,}5 = 2{,}5$

Oppgave 2

14,6 mL av en 0,900 M $Pb(NO_3)_2$-løsning reagerer med en KCl-løsning etter følgende reaksjonsligning:

$$2\mathrm{KCl(aq)} + \mathrm{Pb(NO_3)_2(aq)} \rightarrow \mathrm{PbCl_2(s)} + 2\mathrm{KNO_3(aq)}$$

Det dannes 3,18 g $PbCl_2$. Hva er prosentvis utbytte av $PbCl_2$?

$\mathrm{n_{Pb(NO_3)_2}} = \ 0{,}900\ \mathrm{mol/L}\ \times 0{,}0146\ \mathrm{L} = \ 0{,}01314\ \mathrm{mol}$

$$\frac{n_{PbCl_2}}{n_{Pb(NO_3)_2}} = \frac{1}{1}$$

$$n_{PbCl_2} = n_{Pb(NO_3)_2} = 0{,}01314\ \text{mol}$$

$$m_{PbCl_2} = M_{PbCl_2} \times n_{PbCl_2} = 278{,}1\ \text{g/mol} \times 0{,}01314\ \text{mol} = 3{,}654\ \text{g}$$

Prosentvis utbytte: $\frac{3{,}18}{3{,}654} \times 100\ \% = \mathbf{87{,}0}\ \%$

Oppgave 3

Du har 46,0 g metallisk natrium og 53,25 g klor-gass. Du skal lage NaCl(s).

i) Vis ved beregning hva som er begrensende reaktant.

ii) Beregn hvor mange gram NaCl(s) du maksimalt kan lage.

i)

Balansert reaksjonsligning:

$$2Na(s) + Cl_2(g) \rightarrow 2NaCl(s)$$

$$n_{Na} = \frac{m_{Na}}{M_{Na}} = \frac{46{,}0\ g}{22{,}99\ g/mol} = 2{,}000\ mol$$

$$n_{Cl_2} = \frac{m_{Cl_2}}{M_{Cl_2}} = \frac{53{,}25\ g}{2 \times 35{,}45\ g/mol} = 0{,}7511\ mol$$

Hvis alt Na reagerer:

$$\frac{n_{Cl_2}}{n_{Na}} = \frac{1}{2}$$

$$n_{Cl_2} = \frac{1}{2} n_{Na} = \frac{1}{2} \times 2{,}000\ mol = 1{,}000\ mol$$

Hvis alt Na reagerer trengs 1,000 mol Cl_2.

Hvis alt Cl_2 reagerer:

$$\frac{n_{Na}}{n_{Cl_2}} = \frac{2}{1}$$

$$n_{Na} = 2n_{Cl_2} = 2 \times 0{,}7511\ mol = 1{,}502\ mol$$

Hvis alt Cl_2 reagerer trengs 1,502 mol Na.

Cl_2 begrensende reaktant.

ii)

$$n_{NaCl} = 2n_{Cl_2} = 2 \times 0{,}7511\ mol = 1{,}502\ mol$$

$$m_{NaCl} = M_{NaCl} \times n_{NaCl} = 58{,}44\ g/mol \times 1{,}502\ mol = \mathbf{87{,}8\ g}$$

Oppgave 4

i) Til et kjemi-forsøk trenger du 3,0 dm^3 0,15 M $CuCl_2$-løsning. Hvor mange gram $CuCl_2$ må du tilsette 3,0 dm^3 vann?

60,5 g

9,1 g

20,2 g

44,5 g

$$\mathrm{n_{CuCl_2}} = \mathrm{c \times V = 0{,}15\ mol/L \times 3{,}0\ L = 0{,}45\ mol}$$

$$m_{CuCl_2} = M_{CuCl_2} \times n_{CuCl_2} = 134{,}45\ g/mol \times 0{,}45\ mol = \mathbf{60{,}5\ g}$$

ii) Du må fortynne løsningen til 0,06 M. Hvor mange liter får du av den nye løsningen?

7,5 L

1,2 L

4,5 L

333 L

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{n_{CuCl_2}}}{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{0{,}45\ mol}}{\mathrm{0{,}06\ mol/L}} = \mathbf{7{,}5\ L}$$

Oppgave 5

Følgende reaksjon er gitt:

$$\mathrm{2NaN_3(s) \rightarrow 2Na(s) + 3N_2(g)}$$

Hvor mange gram NaN_3 trengs for å lage 30,0 dm^3 nitrogengass?

Temperaturen er 22,0°C og trykket er 0,95 atm.

51 g

37 g

81 g

121 g

153 g

720 g

$pV = nRT$

$n_{N_2} = \frac{pV}{RT} = \frac{0{,}95\ atm \times 30{,}0\ L}{0{,}082057\ Latm/Kmol \times (22 + 273)\ K} = 1{,}18\ mol$

$n_{NaN_3} = \frac{2}{3} n_{N_2} = \frac{2}{3} \times 1{,}18\ mol = 0{,}787\ mol$

$m_{NaN_3} = M_{NaN_3} \times n_{NaN_3} = 65{,}02\ g/mol \times 0{,}787\ mol = \mathbf{51\ g}$

Oppgave 6

Gitt følgende likevektsreaksjon:

(1) $2CH_4(g) \leftrightarrow C_2H_2(g) + 3H_2(g)$

En beholder inneholder i utgangspunktet 0,115 M CH_4. Beholderen varmes opp til 1700°C og likevekt innstilles. Ved likevekt ved denne temperaturen blir konsentrasjonen av C_2H_2 målt til 0,035 mol/L.

i) Hva er konsentrasjonen av H_2 ved likevekt ved 1700°C?

0,105 mol/L

0,0350 mol/L

0,0450 mol/L

0,0700 mol/L

0,115 mol/L

Likevektstabell

	$2CH_4(g) \leftrightarrow$	$C_2H_2(g)$ +	$3H_2(g)$
Ved start	0,115	0	0
Endring	-2x	x	3x
Ved likevekt	0,115-2x	x = 0,035	3x

Likevektskonsentrasjon av H_2:

$$[H_2] = 3x = 3 \times 0{,}035 = \mathbf{0,105\ mol/L}$$

ii) Hva er likevektskonstanten for likevektsreaksjonen ved 1700°C?

0,0200

0,00306

0,00827

0,0817

50,0

$$K = \frac{[C_2H_2][H_2]^3}{[CH_4]^2} = \frac{x \times (3x)^3}{(0{,}115 - 2x)^2} = \frac{0{,}035 \times (3 \times 0{,}035)^3}{(0{,}115 - 2 \times 0{,}035)^2} = \mathbf{0,0200}$$

Oppgave 7

i) Sett opp et uttrykk for løselighetsproduktet til $Fe(OH)_3$.

ii) Beregn den molare løseligheten til $Fe(OH)_3$ i vann ved 25°C.

Løselighetsprodukt for $Fe(OH)_3$: $8{,}0 \times 10^{-40}$

i)

$$\mathrm{Fe(OH)_3(s)} \ \leftrightarrow\ \mathrm{Fe^{3+}(aq)}\ +\ \mathrm{3OH^-(aq)}$$

$$\mathrm{K_{sp}} = [\mathrm{Fe^{3+}}][\mathrm{OH^-}]^3$$

ii)

Likevektstabell:

	$Fe(OH)_3(s)$ $\leftrightarrow$	$Fe^{3+}(aq)$ +	$3OH^-(aq)$
Ved start	-	0	0
Endring	-	x	3x
Ved likevekt	-	x	3x

$$K_{sp} = [Fe^{3+}][OH^-]^3 = (x) \times (3x)^3 = 8{,}0 \times 10^{-40}$$

$$27x^4 = 8{,}0 \times 10^{-40}$$

$$x = \left(\frac{8{,}0 \times 10^{-40}}{27}\right)^{\frac{1}{4}} = 7{,}38 \times 10^{-11}$$

$$[Fe^{3+}] = x = 7{,}38 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L}$$

$$[OH^-] = 3x = 3 \times 7{,}38 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L} = 2{,}21 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L}$$

$$1\ \mathrm{mol}\ Fe^{3+} \leftrightarrow 1\ \mathrm{mol}\ Fe(OH)_3$$

Molar løselighet av $Fe(OH)_3$: $\mathbf{7,4 \times 10^{-11}\ mol/L}$

Oppgave 8

i) Hva er konsentrasjonen av OH^--ioner i en løsning med pH = 10,43 ved 25°C?

2,7x10^{-4} M

3,7x10^{-11} M

3,7x10^{-25} M

10,4 M

$$\mathrm{pH} = -\log[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-\mathrm{pH}} = 10^{-10{,}43} = 3{,}71 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L}$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{3{,}7 \times 10^{-11}} = \mathbf{2,7 \times 10^{-4}\ mol/L}$$

ii) Gitt følgende syrekonstanter, K_a. Hvilken korresponderende base har høyest verdi for K_b?

CN^-

ClO^-

CHO_2^-

NO_2^-

Jo mindre en syre protolyserer, jo høyere er K_b til den korresponderende basen. Dermed vil den korresponderende basen til den syren som protolyserer minst ha høyest K_b. Derfor vil den korresponderende basen til den syren med lavest K_a, ha høyest K_b. Det blir CN^-.

iii) pH i en 0,100 M HCOOH-løsning er 2,38. Hva er K_a til syren?

$1{,}8 \times 10^{-4}$

$4{,}1 \times 10^{-2}$

$1{,}7 \times 10^{-5}$

$2{,}4 \times 10^{-12}$

$$\mathrm{HCOOH(aq)} \leftrightarrow \mathrm{HCOO^-\,(aq)} + \mathrm{H^+(aq)}$$

$$\mathrm{K_a} = \frac{[\mathrm{HCOO^-}][\mathrm{H^+}]}{[\mathrm{HCOOH}]}$$

Likevektstabell:

	$\mathrm{HCOOH(aq)}$	$\leftrightarrow$ $\mathrm{HCOO^-(aq)}$	$+\ \mathrm{H^+(aq)}$
Ved start	0,100	0	0
Endring	-x	x	x
Ved likevekt	0,100 - x	x	x

$$[\mathrm{H^+}] = 10^{-\mathrm{pH}} = 10^{-2{,}38} = 0{,}004169\ \mathrm{mol/L}$$

$$\mathrm{K_a} = \frac{[\mathrm{HCOO^-}][\mathrm{H^+}]}{[\mathrm{HCOOH}]} = \frac{0{,}004169^2}{0{,}100 - 0{,}004169} = \mathbf{1{,}8 \times 10^{-4}}$$

Felles mekanikkdel

Oppgave 9

Skal bestemme maks høyde for en stein som kastes loddrett oppover fra bakkenivå med startfart $v_{0y} = 16\,\mathrm{m/s}$ på Månen der tyngdeaks. er $g = -1,6\,\mathrm{m/s^2}$ (med positiv y-retning oppover). Bruker bevegelseslikningen

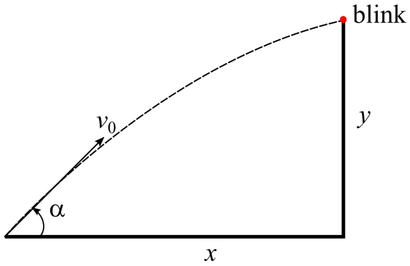
$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2gy \Rightarrow y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g}$$

I punktet med størst høyde er $y = y_{max}$ og $v_y = 0$:

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{0 - (16\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot (-1,6\,\mathrm{m/s^2})} \\ &= \underline{\underline{80\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 10

Skal bestemme startfarten v_0 slik at kula på figuren under treffer midt i blinken, som befinnre seg i horisontal avstand x og vertikal avstand y, og utskytingsvinkelen er α.



Kombinerer bevegelseslikningene

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t = v_0 \cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \\ y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Setter inn for t i likningen for y:

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 \\ y &= x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{v_0^2} \\ \frac{1}{2}\frac{gx^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{v_0^2} &= x\tan\alpha - y \\ v_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{gx^2}{\cos^2\alpha\,(x\tan\alpha - y)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(10\,\mathrm{m})^2}{\cos^2 40^\circ\,(10\,\mathrm{m}\tan 40^\circ - 5,0\,\mathrm{m})}} \\ &= 15,7\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{16\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 11

Bevegelseslikningen for et objekt som kastes ut loddrett fra bakkenivå ($y = 0$) er gitt ved

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

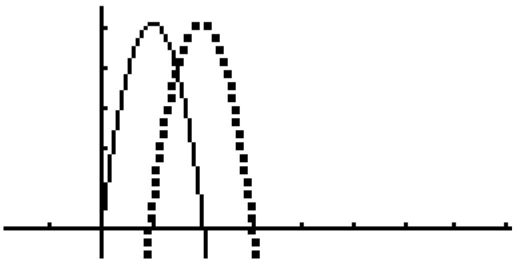
To steiner kastes oppover fra samme starpunkt med samme startfart, men den ene kastes en tid $t_0 = 1,0\,\mathrm{s}$ etter den første. Hvis y_1 og y_2 angir y-koordinaten til hhv. den første og den siste steinen som blir kastet, blir altså bevegelseslikningene (dersom $t = 0$ er tidspunktet der den **første** steinen kastes oppover):

$$\begin{aligned} y_1 &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_2 &= v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

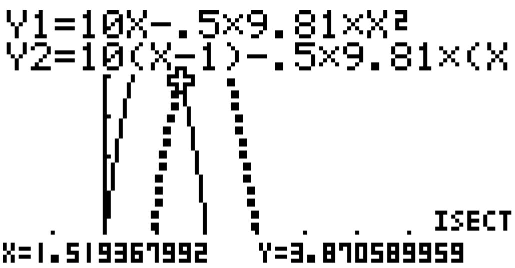
En kjapp løsning her er å tegne grafen til de to parablene og så finne skjæringspunktet. Uten enheter blir funksjonene

$$\begin{aligned} y_1 &= 10t - \frac{1}{2} \cdot 9,81t^2 \\ y_2 &= 10(t - 1,0) - \frac{1}{2} \cdot 9,81(t - 1,0)^2 \end{aligned}$$

Grafmodus på kalkulator gir følgede to grafer:



Vi kan lese ut skjæringspunktet direkte (y-koordinaten til skjæringspunktet tilsvarer riktig løsning):

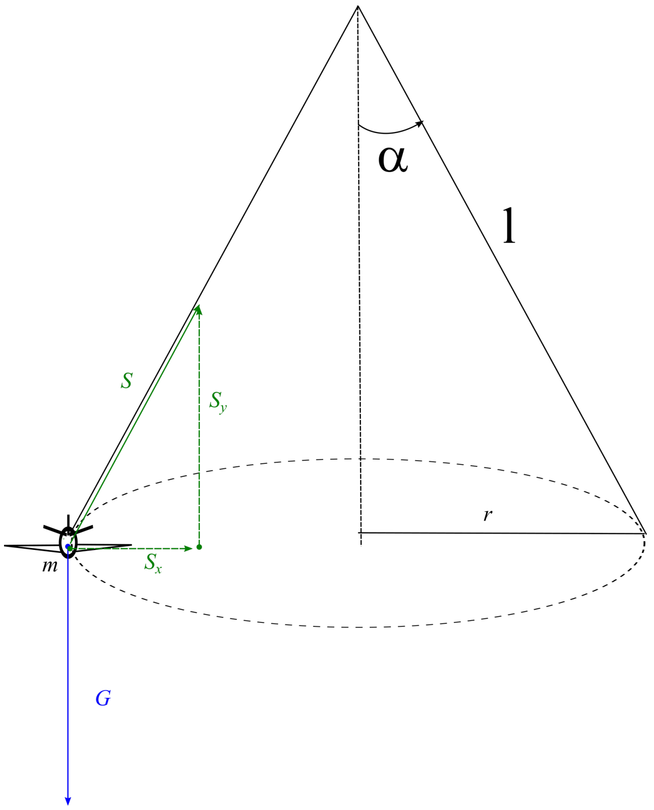


Løsning:

$$\begin{aligned} y &= 3,87\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{3,9\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

Figuren under viser kreftene som virker på flyet: snorkraften S og tyngden G:



Ettersom flyet ikke beveger seg i y-retningen, er

$$S_y = mg,$$

Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen gir (via

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ S_x &= m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \qquad \text{(Formel for sentripetalaks.)} \end{aligned}$$

Fra trignometri er dessuten

$$S_x = S_y \tan\alpha = mg\tan\alpha,$$

slik at

$$\begin{aligned} mg\tan\alpha &= m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ \tan\alpha &= \frac{4\pi^2 r}{gT^2} \end{aligned}$$

Fra figurer er radiusen r i sirkelen gitt ved

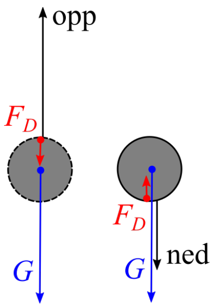
$$r = l\sin\alpha,$$

som gir

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{4\pi^2 \cdot l \sin\alpha}{gT^2} \\
\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{4\pi^2 \cdot l \sin\alpha}{gT^2} && \text{(Trig. identitet)} \\
\frac{1}{\cos\alpha} &= \frac{4\pi^2 \cdot l}{gT^2} && \text{(Forkorter)} \\
\cos\alpha &= \frac{gT^2}{4\pi^2 l} \\
\alpha &= \underline{\underline{\arccos\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 l}\right)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 13

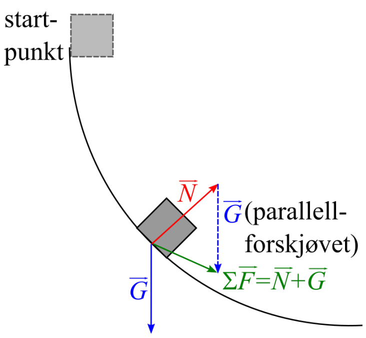
Figuren under viser kretene som virker på steinen under opp- og nedturen: tyngdekraften G og luftmotstanden F_D:



Som figuren viser, er nettokraften/kraftsummen $\sum F$ **størst på vei opp** (G og F_D virker begge nedover); på vei nedover virker G og F_D i motsatt retning. Fordi $\sum F$ er størst på vei opp, er akselerasjonen (oppbremingen) størst på vei opp. Den vil da bruke **kortest tid på vei til toppen**, sammenliknet med tiden fra topp tilbake til utgangspunktet.

Oppgave 14

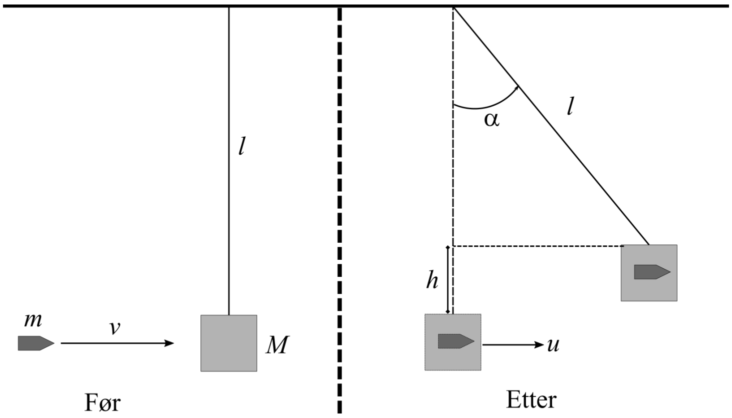
Figuren under viser kreftene som virker på legemet når det sklir ned skråplanet: tyngden $\vec{G}$ og normkraften $\vec{N}$ fra underlaget. Kraftsummen $\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{G}$ er inntegnet.



Fra Newtons 2. lov peker akselerasjonen **langs kraftsummen** $\sum \vec{F}$.

Oppgave 15

Figuren under viser situasjonen der kula treffer klossen i et fullstendig uelastisk støt. Like etter støtet har felleslegemet en fart u og svinger ut til et maksimalt vinkelutslag α, og massesenteret hever seg en høyde h fra laveste punkt like etter støtet.



I støtet er bevegelsesmengde bevart:

$$\begin{aligned}\sum p_{før} &= \sum p_{etter}\\ mv &= (M+m)\,u\\ v &= \underline{\frac{M+m}{m}u}\end{aligned}$$

Uttrykker u ved vinkelutslaget α ved hjelp av energibevaring for felleslegemet:

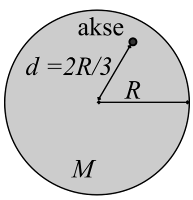
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(M+m)\,u^2 &= (M+m)\,gh\\ u^2 &= 2gh\\ &= 2g\,(l-l\cos\alpha) && \text{(Trigonometri fra figuren)}\\ &= \underline{2gl\,(1-\cos\alpha)}\end{aligned}$$

Dette gir for farten v til kula før støtet:

$$\begin{aligned}v &= \frac{M+m}{m}u\\ &= \underline{\underline{\frac{M+m}{m}\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha)}}}\end{aligned}$$

Oppgave 16

Vi skal bestemme treghetsmomentet til skiva på figuren under om den angitte aksen:

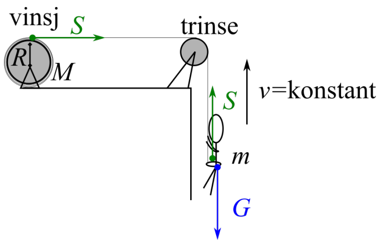


Ettersom aksen er parallell med en vertikal akse gjennom massesenteret (sentrum av skiva), kan vi bruke Steiners sats/parallellakse-teoremet: hvis I er treghetsmomentet om den oppgitte aksen, er

$$\begin{aligned} I &= I_{CM} + Md^2 \\ &= \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{2R}{3}\right)^2 && \text{(Finner } I_{CM} \text{fra formelark)} \\ &= \frac{1}{2}MR^2 + M\cdot\frac{4}{9}R^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\right)MR^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{17}{18}MR^2}} \end{aligned}$$

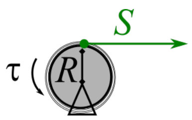
Oppgave 17

i) Figuren under viser kreftene som virker på stuntmannen når han heises oppover med konstant fart: tyngden G og snordraget S, som er like store fra Newtons 1. lov:



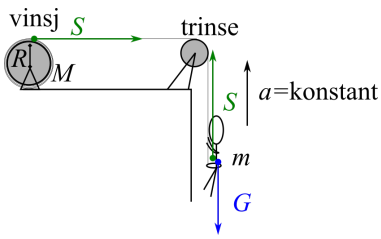
I tillegg er snordraget i hver ende av snora det samme, ettersom trinsa er friksjonsfri og snora er masseløs.

ii) For at vinsjen skal rotere med konstant vinkelfart, må summen av alle dreiemoment på vinsjen være null. Motoen må yte et dreiemoment τ for å motvirke dreiemomentet fra snordraget S, som vist på figuren under:

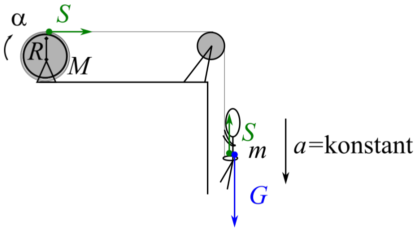


$$\begin{aligned} \sum \tau &= 0 \\ \tau - S\cdot R &= 0 \\ \tau &= S\cdot R \\ &= mg\cdot R && (S = mg \text{ fra forrige oppgave}) \\ &= mgR \\ &= 80\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0{,}60\,\mathrm{m} \\ &= 471\,\mathrm{Nm} \\ &\approx \underline{\underline{0{,}47\,\mathrm{kNm}}} \end{aligned}$$

iii) Figuren under viser situasjonen der stuntmannen heises oppover med konstant akselerasjon $a > 0$, der $S > G$ slik at kraftsummen og akselersjonen er rettet oppover:



iv) Dersom vinsjmotoren plutselig svikter slik at snora løper av sylinderen uten å gli, blir situasjonen som vist på figuren under:



For stuntmannen gir Newtons 2. lov at

$$\sum F = ma$$
$$G - S = ma$$

For sylinderen gir Newtons 2. lov for rotasjon at

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$S \cdot R = I\alpha$$

Fordi snora løper av uten å gli mot sylinderen, har sylinderen samme tangentielle akselerasjon som stuntmannen, slik at

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Dette gir sammen med uttrykket for treghetsmoment for en sylinder:

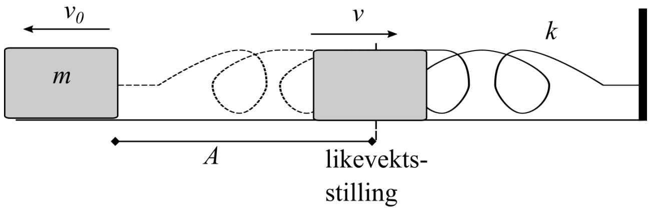
$$\begin{aligned} S \cdot R &= I\alpha \\ S \cdot R &= \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \\ S &= \underline{\frac{1}{2}Ma} \end{aligned}$$

Setter inn i Newtons 2. lov for stuntmannen:

$$\begin{aligned} G - S &= ma \\ mg - \frac{1}{2}Ma &= ma \\ a\left(m + \frac{1}{2}M\right) &= mg \\ a &= \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}g \\ &= \frac{80\,\mathrm{kg}}{80\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} \cdot 40\,\mathrm{kg}} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \\ &\approx \underline{\underline{7,8\,\mathrm{m/s^2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 18

Figuren under viser klossen som slippes fra startpunktet en avstand A fra likevektsstillingen med startfart v_0, og passerer likevektsstilliingen med fart v. Ettersom mekanisk energi er bevart er farten størst i likevektspunktet, der minst mulig energi er "bundet" som potensiell energi i fjæra.



Energibevaring mellom startpunkt og likevektsstilling:

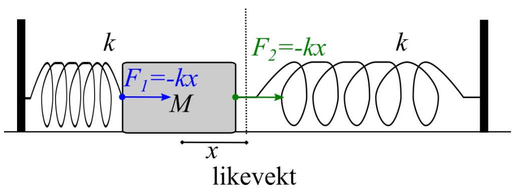
$$\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{k}{m}A^2 \qquad \text{(Forkorter)}$$

$$v = \underline{\underline{\sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}A^2}}}$$

Oppgave 19

Figuren under viser situasjonen der klossen er trukket en strekning x mot venstre (negativ x-retning). To krefter F_1 og F_2 virker, begge mot høyre (ettersom x selv er negativ, får begge kreftene negative fortegn slik at begge virker i positiv x-retning mot høyre):



Newtons 2. lov på klossen gir

$$\sum F = ma_x$$

$$F_1 + F_2 = ma_x$$

$$-kx - kx = ma_x$$

$$-2kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{(Def. av akselerasjon)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{k}{m}x \equiv -\omega_0^2 x,$$

der $\omega_0^2 = 2\frac{k}{m}$. Dette er en likningen for en harmonisk svingning med vinkelfrekvens

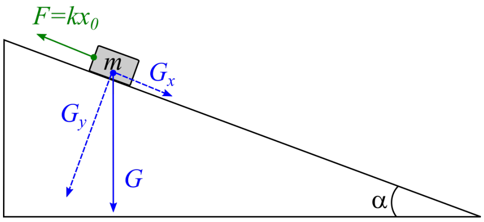
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Dette tilsvarer en frekvens

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}}}$$

Oppgave 20

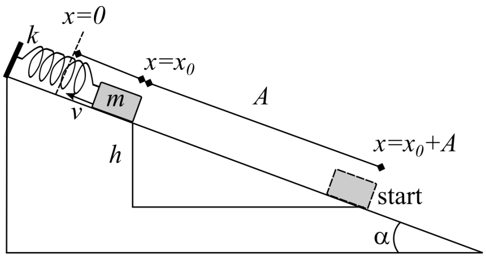
i) Figuren under viser kreftene som virker på klossen i likevektsposisjonen, idet den befinner seg i en avstand $x_0$under punktet der fjæra er slapp (normalkraften fra underlaget er ikke inntegnet):



ii) Newtons 1. lov anvendt på situasjonen over gir

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \\
kx_0 &= G_x \\
kx_0 &= mg\sin\alpha \\
x_0 &= \underline{\frac{mg}{k}\sin\alpha}
\end{aligned}$$

iii) Figuren under viser situasjonen der klossen starter ved maks. utslag A med null startfart, og beveger seg opp til likevektsposisjonen en høyde h over startpunktet, der farten er v:



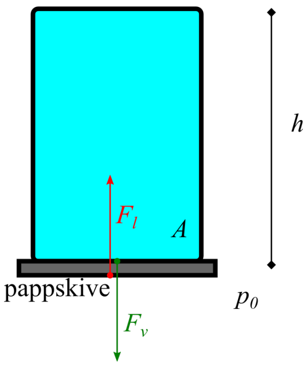
Klossen dras så ned til startpunktet, og slippes. Energibevaring gir, med nullnivå for potensiell energi i tyngdefeltet i startpunktet (potensiell energi i fjæra går over til kinetisk energi + potensiell energi i tyngde + potensiell energi i fjæra):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}k\left(x_0+A\right)^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx_0^2 \\
\frac{1}{2}k\left(x_0^2+2x_0A+A^2\right) &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx_0^2 \\
\frac{1}{2}kx_0^2 + kx_0A + \frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx_0^2 \\
kx_0A + \frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mg\cdot A\sin\alpha \\
k\cdot\frac{mg}{k}\sin\alpha\cdot A + \frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgA\sin\alpha && \text{(Setter inn for } x_0\text{)} \\
\frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}mv^2 && \text{(Stryker to ledd mot hverandre)} \\
v &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{k}{m}A^2}}}
\end{aligned}$$

Fluidmekanikk- og bølgefysikkdel

Oppgave 21

Figuren under viser kreftene som virker på pappskiva når den "holder igjen" vannet i beholderen: kraften F_v fra vannet, og kraften F_l på grunn av lufttrykket:



Trykkene på hver side av skiva må være like store når den "henger" i ro og "holder igjen" vannet. Definsjonen av trykk som kraft/flate sammenholdt med uttrykket for trykk av væskesøyle gir

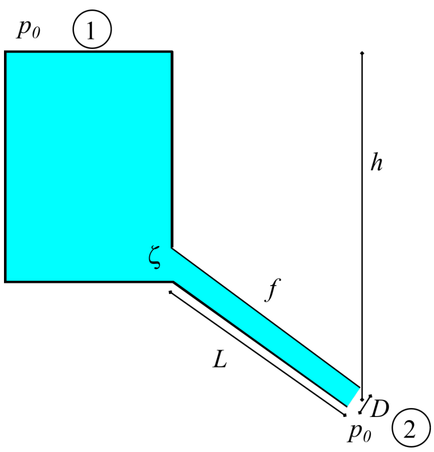
$$\frac{F_l}{A} = \frac{F_v}{A}$$
$$p_0 = \rho g h$$
$$h = \frac{p_0}{\rho g}$$

Den største verdien h kan ha for at vannet skal "holdes på plass" av pappskiva blir altså

$$\begin{aligned} h &= \frac{1,0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{1,0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 10,1\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{10\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 22

Setter opp Bernoullis likning med tapsledd mellom punkt 1 (vannspeilet) og punkt 2 (rørutløpet), som indikert på figuren under:



Bernoullis likning med tapsledd h_f for rørfriksjon og h_e for enkeltmotstand (rørinnløpet):

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + y_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + y_2 + h_f + h_e,$$

der tapsleddene er gitt ved

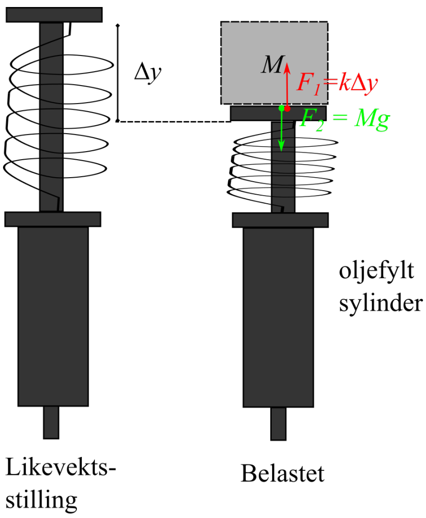
$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g}, \; h_e = \zeta\frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g}.$$

Forenklinger: fordi tanken har mye større tverrsnitt enn røret, kan vi sette $v_1 = 0$. Begge punktene ligger i friluft, så $p_1 = p_2 = p_0$. Ved å velge nullnivå ved rørutløpet, er $y_2 = 0$ og $y_1 = h$.

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + h_f + h_e \\
h &= \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + \zeta\frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} \\
h &= \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g}\left(1 + f\frac{L}{D} + \zeta\right) \\
v_2 &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2gh}{1 + f\frac{L}{D} + \zeta}}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 23

i) Figuren under viser situasjonen der en masse M er plassert på én av støtdemperne. Stempelet, som er i ro, påvirkes av en kraft $F_1 = k\Delta y$ fra fjæra og $F_2 = Mg$ fra massen oppå stempelet.



Når demperen er belastet er altså

$$\begin{aligned}
k\Delta y = Mg \Rightarrow k &= \frac{Mg}{\Delta y} \\
k &= \frac{\frac{1}{2}\cdot 420\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}{0,070\,\mathrm{m}} \qquad \text{(Halve lasten ligger på én demper)} \\
&= 29,4\,\mathrm{kN/m} \\
&\approx \underline{\underline{29\,\mathrm{kN/m}}}
\end{aligned}$$

ii) Skal bestemme dempingskonstanten b som den oljefylte sylinderen må gi for å gi kritisk demping når en massen plassert oppå demperen er $M = 600\,\mathrm{kg}$ og fjærkonstanten er $25\,\mathrm{kN/m}$.

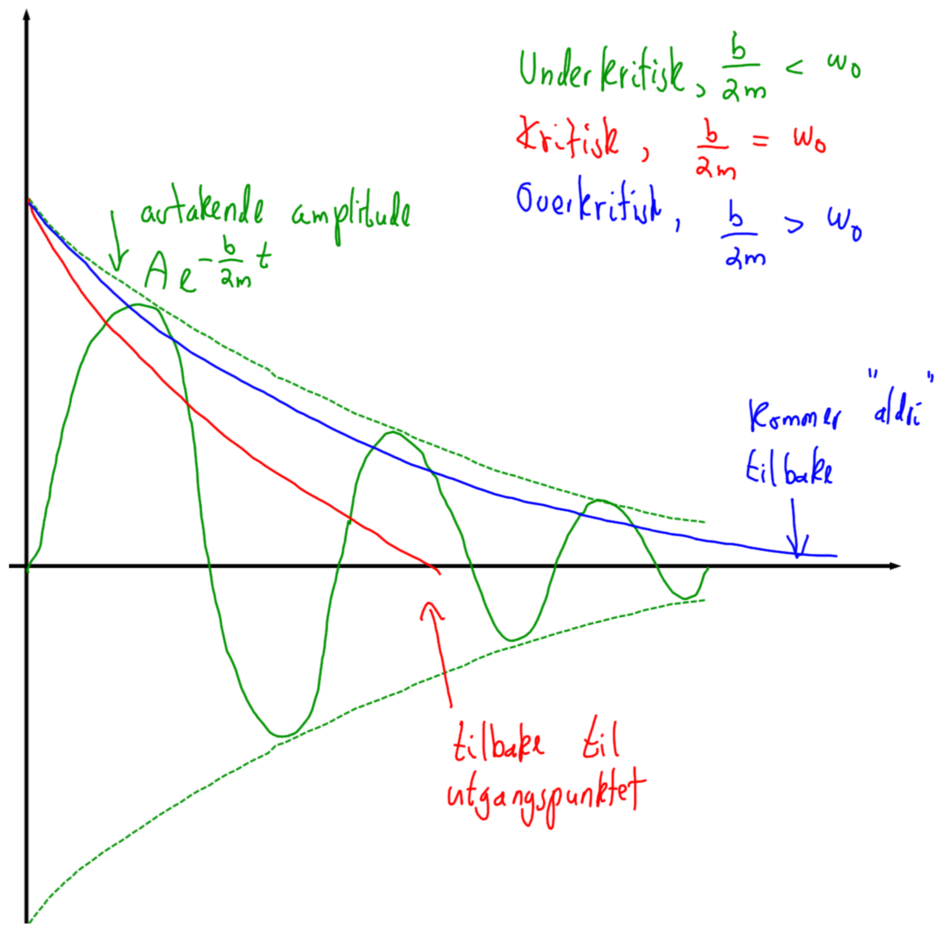
Som beskrevet på formelarket oppstår kritisk demping når dempingskonstanten b oppfyller

$$\begin{aligned}\frac{b}{2M} &= \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}\\ b &= 2M\sqrt{\frac{k}{M}}\\ &= \underline{2\sqrt{kM}}\end{aligned}$$

Her blir tallverdien

$$\begin{aligned}b &= 2\sqrt{25\cdot 10^3\,\mathrm{N/m}\cdot 600\,\mathrm{kg}}\\ &= \underline{\underline{7,7\,\mathrm{kg/s}}}\end{aligned}$$

iii) Figuren under illustrerer den kvalitatitve forskjellen mellom under-, kritisk og overkritisk dempede svingninger:



- **Underkritisk** dempede svingninger, der dempingsleddet $b/2m$ er "lite", er den eneste formen for dempede svingninger som faktisk er periodisk, ettersom massen her svinger med eksponentielt avtakende amplitude.
- Ved **kritisk** dempede svingninger er forholdet mellom dempingsleddet $b/2m$ og resten av systemet "finjustert" slik at massen kommer tilbake til utgangspunktet etter en endelig tid

(dvs. her er det ingen svingning i det hele tatt). Støtdempere i en bil er kritisk dempet nettopp fordi man ut fra kjørekomfort og -sikkerhet ønsker at den vertikale svingebevegelsen skal avta så raskt som mulig etter at man har kjørt over en dump i veien.

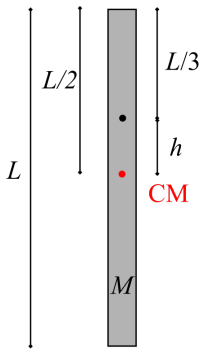
- Ved **overkritisk** demping er dempingsleddet $b/2m$ så "stort" at massen bruker "uendelig" lang tid tilbake mot utgangspunktet.

iv) Skal bestemme den maksimale vertikale farten v_0 massen M kan ha dersom den maksimale vertikale strekningen demperen kan komprimeres uten å bli ødelagt er y. Energibevaring gir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Mv_0^2 &= \frac{1}{2}ky^2\\ v_0 &= \sqrt{\frac{ky^2}{M}}\\ &= \sqrt{\frac{25\cdot 10^3\,\mathrm{N/m}\cdot(0,20\,\mathrm{m})^2}{600\,\mathrm{kg}}}\\ &= 1,29\,\mathrm{m/s}\\ &\approx \underline{1,3\,\mathrm{m/s}}\end{aligned}$$

Oppgave 24

Figuren under viser pendelen i form av en jevntykk stang med masse M og lengde L som svinger om angitt akse:



Perioden T for en fysisk pendel med masse M som svinger om en akse er gitt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}},$$

der I er treghetsmomentet om aksen og h er avstanden mellom massesenteret (CM) og aksen. Her er fra figuren

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \underline{\frac{L}{6}}$$

Treghetsmomentet om aksen er gitt ved Steiners sats:

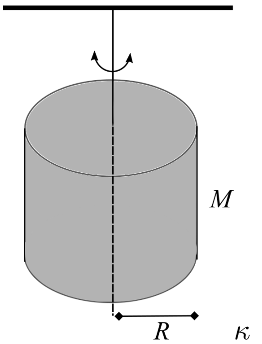
$$\begin{aligned}I &= I_{CM} + Mh^2\\ &= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{6}\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{36}\right)ML^2\\ &= \underline{\frac{1}{9}ML^2}\end{aligned}$$

Da er perioden lik

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{9}ML^2}{Mg\cdot\frac{L}{6}}} \\ &= \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 25

En torsjonspendel i form av en sirkulær skive med masse M og radius R som er festet i sentrum til en vertikal vaier med torsjonskonstant κ, som vi skal bestemme ut i fra en kjent periode T. Se figuren under.



Fra formelarket er perioden til en torsjonspendel gitt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}},$$

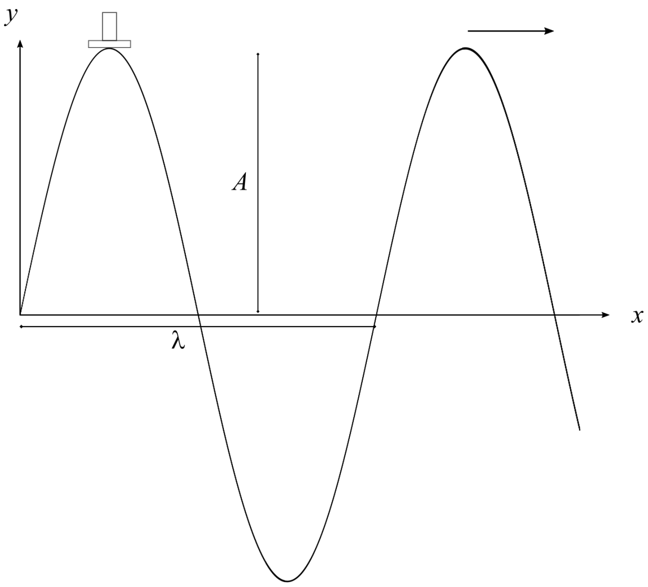
der I er treghetsmomentet om opphengingspunktet. Her er $I = \frac{1}{2}MR^2$,og vi løser med hensyn på κ:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{I}{\kappa}} &= \frac{T}{2\pi} \\ \frac{I}{\kappa} &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \\ \kappa &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot I \\ &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot\frac{1}{2}MR^2 \\ &= \left(\frac{2\pi}{1,5\,\mathrm{s}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1,5\,\mathrm{kg}\cdot(0,15\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0,296\,\mathrm{Nm/rad} \\ &\approx \underline{\underline{0,30\,\mathrm{Nm/rad}}} \end{aligned}$$

Kommentar: at κ skal ha enhet Nm/rad er lettest å innse fra antakelsen om dreiemomentet fra vaieren i en torsjonspendel når vaieren er rotert en vinkel θ: $\tau = \kappa\theta$.

Oppgave 26

i) Figuren under viser et øyeblikksbilde av bølgeutslaget $y(x)$ ved $t = 0$:



Vi skal bestemme uttrykket for den sinusformede bølgen som har bølgelengde λ og periode T, og som beveger seg med konstant fart mot høyre. Ettersom bølgeutslaget er null ved $t = 0$, er faseforskyvningen $\phi = 0$ og vi finner riktig uttrykk fra formelarket:

$$y(x,t) = \underline{\underline{A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)}},$$

der minustegnet indikerer bølgebevegelse mot høyre.

ii) Det er gitt at sammenhengen mellom bølgetallet k og vinkelfrekvensen ω for vannbølger på dypt vann er gitt ved

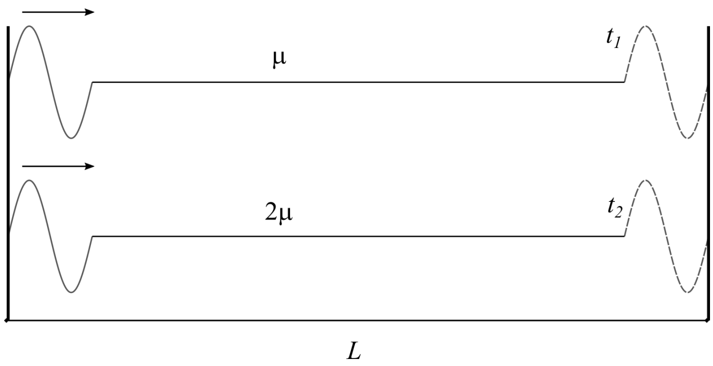
$$\omega^2 = gk$$

Bruker sammenhengene $\omega = \frac{2\pi}{T}$ og $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= g \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \\
\frac{(2\pi)^2}{T^2} &= g.\frac{2\pi}{\lambda} \\
\frac{2\pi}{T^2} &= \frac{g}{\lambda} && \text{(Forkorter)} \\
T &= \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \\
&= \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10\,\mathrm{m}}{9,81\,\mathrm{m/s^2}}} \\
&= 2,53\,\mathrm{s} \\
&\approx \underline{\underline{2,5\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 27

To bølgepulser sendes samtidig nedover hver sin streng med masse per lengdeenhet lik hhv. μ_1 og μ_2, og pulsene bruker tidene hhv. t_1 og t_2 fra én vertikal stang til en annen i avstand L. Strengene har identisk stramming F_T. Se figuren under.



Vi skal bestemme forholdet t_1/t_2. Bølgefarten på en streng er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}},$$

slik at pulsene vil bruke ulik tid på avstanden L - strengen med minst masse per lengdeenhet har størst bølgefart, så den øverste pulsen på figuren vil komme først (så tiden t_1 er minst). Bølgefartene er altså hhv. $v_1 = \sqrt{F_T/\mu}$ og $v_2 = \sqrt{F_T/2\mu}$. Ettersom bølgefarten er konstant, er sammenhengen mellom tid, strekning og fart gitt ved bevegelseslikningen for konstant fart:

$$t_1 = \frac{L}{v_1},\ t_2 = \frac{L}{v_2}$$

Her er altså

$$\begin{aligned} \frac{t_1}{t_2} &= \frac{\frac{L}{v_1}}{\frac{L}{v_2}} \\ &= \frac{v_2}{v_1} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{F_T}{2\mu}}}{\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 28

Stående bølger på en streng oppstår når frekvensen er et helt antall ganger grunnfrekvensen f_1. Det betyr at differansen mellom to etterfølgende stående bølger alltid er lik f_1. Her er denne differansen lik $480\,\text{Hz} - 400\,\text{Hz} = 80\,\text{Hz}$,dvs. $f_1 = 80\,\text{Hz}$.

i) Vi skal bestemme frekvensen som tilsvarer frekvensen $f_n = 400\,\text{Hz}$. Her kan vi f.eks. bestemme ordenstallet n:

$$\begin{aligned} nf_1 &= 400\,\text{Hz} \\ n \cdot 80\,\text{Hz} &= 400\,\text{Hz} \\ n &= \underline{5} \end{aligned}$$

Denne frekvensen tilsvarer altså 5. ordens stående bølge, med bølgelengde (fra formelarket)

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{2}{n}L \\
\lambda_5 &= \frac{2}{5}L \\
&= \frac{2}{5} \cdot 1,0\,\mathrm{m} \\
&= \underline{\underline{0,40\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}
$$

ii) Snorstrammingen ("tension") er gitt fra sammenhengen

$$
v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}},
$$

der v er bølgefarten og μ er masse per lengdeenhet. Bølgefarten er gitt ved

$$
v = \lambda_n f_n,
$$

der vi kan bruke sammenhørende verdier for λ og f for et hvilket som helst ordenstall. Ettersom vi har regnet ut frekvens og bølgelengde for $n = 5$, kan vi bruke denne:

$$
\begin{aligned}
\lambda_5 f_5 &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\
(\lambda_5 f_5)^2 &= \frac{F_T}{\mu} \\
F_T &= \mu\,(\lambda_5 f_5)^2 \\
&= 0,0025\,\mathrm{kg/m} \cdot (0,40\,\mathrm{m} \cdot 400\,\mathrm{Hz})^2 \\
&= \underline{\underline{64\,\mathrm{N}}}
\end{aligned}
$$