Løsningsforslag kjemidel eksamen

IFYKJ Fysikk/kjemi

Vår 2021

Oppgave 1

Hvilke(n) av følgende påstander om bindinger mellom atomer er korrekt(e)?

Bindingen mellom hydrogen og oksygen i vann er polar kovalent binding

Hvis forskjellen i elektronegativitet mellom 2 atomer er 1,0 danner de polar kovalent binding

Bindingen mellom natrium og oksygen i Na_2O er ionebinding

For å avgjøre hvilken bindingstype som dannes mellom 2 atomer må det vurderes hvor mange valenselektroner de 2 atomene har

Bindingen mellom 2 like atomer vil alltid være kovalent binding

Det vil bare dannes kovalent binding mellom 2 like atomer

Oppgave 2

a) Fe kan produseres fra Fe_2O_3 i henhold til følgende reaksjonsligning:

$$\mathrm{Fe_2O_3(s) + 3CO(g) \rightarrow 2Fe(s) + 3CO_2(g)}$$

167 g Fe_2O_3 reagerer med 85,5 g CO og det dannes 72,3 g Fe. Beregn hvor mange gram Fe som kan bli dannet og prosentvis utbytte av Fe.

$$\mathrm{m_{Fe_2O_3} = 167\ g}$$

$$\mathrm{m_{CO} = 85{,}5\ g}$$

$$\mathrm{n_{Fe_2O_3} = \frac{m_{Fe_2O_3}}{M_{Fe_2O_3}} = \frac{167\ g}{159{,}7\ g/mol} = 1{,}046\ mol}$$

$$\mathrm{n_{CO} = \frac{m_{CO}}{M_{CO}} = \frac{167\ g}{28{,}01\ g/mol} = 3{,}052\ mol}$$

Hvis alt Fe_2O_3 reagerer:

$$\mathrm{\frac{n_{CO}}{n_{Fe_2O_3}} = \frac{3}{1}}$$

$$n_{CO} = 3n_{Fe_2O_3} = 3 \times 1{,}046 \text{ mol} = 3{,}138 \text{ mol}$$

Hvis alt Fe_2O_3 reagerer trengs 3,138 mol CO.

Hvis alt CO reagerer:

$$\frac{n_{Fe_2O_3}}{n_{CO}} = \frac{1}{3}$$

$$n_{Fe_2O_3} = \frac{n_{CO}}{3} = \frac{3{,}052 \text{ mol}}{3} = 1{,}017 \text{ mol}$$

CO begrensende reaktant

$$\frac{n_{Fe}}{n_{CO}} = \frac{2}{3}$$

$$n_{Fe} = \frac{2}{3} n_{CO} = \frac{2}{3} \times 3{,}052 \text{ mol} = 2{,}035 \text{ mol}$$

$$m_{Fe} = M_{Fe} \times n_{Fe} = 55{,}85 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \times 2{,}035 \text{ mol} = 113{,}6 \text{ g}$$

Teoretisk utbytte:

$$m_{Fe} = \mathbf{114\ g}$$

Prosentvis utbytte:

$$\frac{72{,}3 \text{ g}}{114 \text{ g}} \times 100\ \% = \mathbf{63{,}4}\ \%$$

b) Fe løses opp i HBr i henhold til følgende reaksjonsligning:

$$Fe(s) + 2HBr(aq) \rightarrow FeBr_2(aq) + H_2(g)$$

Anta at hydrogengassen som dannes, når 3,2 g Fe løses opp i HBr, tilsettes en tom, lukket beholder på 0,85 L ved 25°C. Beregn trykket i beholderen. Anta at trykket i den tomme beholderen var 0 før tilsetting av hydrogengassen.

$$m_{Fe} = 3{,}2 \text{ g}$$

$$n_{Fe} = \frac{m_{Fe}}{M_{Fe}} = \frac{3{,}2 \text{ g}}{55{,}85 \text{ g/mol}} = 0{,}0573 \text{ mol}$$

$$\frac{n_{H_2}}{n_{Fe}} = \frac{1}{1}$$

$$n_{H_2} = n_{Fe} = 0{,}0573 \text{ mol} = 0{,}0573 \text{ mol}$$

$$V = 0{,}85 \text{ L}$$

$T = 25^oC$

$pV = nRT$

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{0{,}0573\text{ mol } \times 0{,}082057\text{ (L} \times \text{atm)/(K} \times \text{mol) } \times (25 + 273)\text{ K}}{0{,}85\text{ L}} = \mathbf{1,6\ atm}$$

c) 0,012 g $MgCl_2$ og 0,028 g NaCl løses opp i vann og volumet til løsningen blir 2,50 liter. Beregn konsentrasjonen av Cl^- - ioner i løsningen.

$$n_{MgCl_2} = \frac{m_{MgCl_2}}{M_{MgCl_2}} = \frac{0{,}0120\text{ g}}{95{,}21\text{ g/mol}} = 1{,}26 \times 10^{-4}\text{ mol}$$

$$n_{Cl^-} = 2n_{MgCl_2} = 2 \times 1{,}260 \times 10^{-4}\text{ mol} = 2{,}52 \times 10^{-4}\text{ mol}$$

$$n_{NaCl} = \frac{m_{NaCl}}{M_{NaCl}} = \frac{0{,}0280\text{ g}}{58{,}44\text{ g/mol}} = 0{,}000479\text{ mol}$$

$$n_{Cl^-} = n_{NaCl} = 4{,}49 \times 10^{-4}\text{ mol}$$

$$[Cl^-] = \frac{n_{Cl^-}}{V} = \frac{4{,}49 \times 10^{-4}\text{ mol} + 2{,}52 \times 10^{-4}\text{ mol}}{2{,}50\text{ L}} = \mathbf{2,9 \times 10^{-4}\ mol/L}$$

Oppgave 3

Gitt følgende likevektsreaksjon:

$$H_2(g) + Br_2(g) \leftrightarrow 2HBr(g)$$

Anta at denne likevektsreaksjonen ved en gitt temperatur har en likevektskonstant, K_c, på 0,27. En beholder inneholder 1,75 mol/L H_2, 1,75 mol/L Br_2 og 2,50 mol/L av HBr ved den aktuelle temperaturen.

a) I hvilken retning vil reaksjonen gå for å innstille likevekt? Vis med beregninger.

$$Q = \frac{[HBr]^2}{[H_2][Br_2]} = \frac{2{,}50^2}{1{,}75 \times 1{,}75} = 2{,}04$$

$Q > K_c$

Reaksjonen går mot venstre

b) Likevektskonsentrasjonen av H_2 ved den aktuelle temperaturen blir målt til 2,38 moL/L. Beregn likevektskonsentrasjonene av Br_2 og HBr.

Likevektstabell:

	$H_2(g)$	$+ Br_2(g)$	$\leftrightarrow 2HBr(g)$
Ved start	1,75	1,75	2,50
Endring	x	x	-2x
Ved likevekt	1,75 + x	1,75 + x	2,50 - 2x

$[H_2] = 1{,}75 + x = 2{,}38 \text{ mol/L}$

$[Br_2] = [Cl_2] = 2{,}38 \text{ mol/L}$

$x = 2{,}38 \text{ mol/L} - 1{,}75 \text{ mol/L} = 0{,}63 \text{ mol/L}$

$[HBr] = 2{,}50 - 2x = 2{,}50 - 2 \times 0{,}63 = 1{,}24 \text{ mol/L}$

$[Br_2] = \mathbf{2{,}38\ mol/L}$

$[HBr] = \mathbf{1{,}24\ mol/L}$

Oppgave 4

Den molare løseligheten til Ag_3PO_4 er $5{,}63 \times 10^{-7}$ mol/L. Beregn løselighetsproduktet, K_{sp}, til Ag_3PO_4.

$\mathbf{2{,}7 \times 10^{-24}}$

$1{,}0 \times 10^{-25}$

$1{,}8 \times 10^{-19}$

$4{,}8 \times 10^{-18}$

$3{,}2 \times 10^{-13}$

$9{,}5 \times 10^{-13}$

$Ag_3PO_4(s) = 3Ag^+(aq) + PO_4^{3-}(aq)$

$K_{sp} = [Ag^+]^3[PO_4^{3-}]$

Antar 1 L løsning:

$n_{Ag_3PO_4} = 5{,}63 \times 10^{-7} \text{ mol/L} \times 1 \text{ L} = 5{,}63 \times 10^{-7} \text{ mol}$

$n_{Ag^+} = 3n_{Ag_3PO_4} = 3 \times 5{,}63 \times 10^{-7} \text{ mol} = 1{,}689 \times 10^{-6} \text{ mol}$

$n_{PO_4^{3-}} = n_{Ag_3PO_4} = 5{,}63 \times 10^{-7} \text{ mol}$

$$[Ag^+] = \frac{n_{Ag^+}}{V} = \frac{1{,}689 \times 10^{-6}\ mol}{1\ L} = 1{,}689 \times 10^{-6}\ mol/L$$

$$[PO_4^{3-}] = \frac{n_{PO_4^{3-}}}{V} = \frac{5{,}63 \times 10^{-7}\ mol}{1\ L} = 5{,}63 \times 10^{-7}\ mol/L$$

$$K_{sp} = [Ag^+]^3[PO_4^{3-}] = (1{,}689 \times 10^{-6})^3 \times 5{,}63 \times 10^{-7} = \mathbf{2{,}72 \times 10^{-24}}$$

Oppgave 5

En 0,100 mol/L vannløsning av CH_3NH_2 har pH på 11,82 ved 25°C. Beregn basekonstanten, K_b, til CH_3NH_2.

$\mathbf{4{,}67 \times 10^{-4}}$

$4{,}91 \times 10^{-5}$

$2{,}14 \times 10^{-11}$

$1{,}51 \times 10^{-12}$

$6{,}61 \times 10^{-3}$

	$CH_3NH_2(aq)$ +	$H_2O(l) \leftrightarrow$	$CH_3NH_3^+(aq)$ +	$OH^-(aq)$
Ved start	0,100	-	0	0
Endring	-x	-	x	x
Ved likevekt	0,100 – x	-	x	x

$$K_b = \frac{[CH_3NH_3^+][OH^-]}{[CH_3NH_2]} = \frac{x^2}{0{,}100 - x}$$

$$pH = 11{,}82$$

$$[H^+] = 10^{-11{,}82} = 1{,}514 \times 10^{-12}\ mol/L$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{1{,}514 \times 10^{-12}} = 0{,}006605\ mol/L$$

$$[CH_3NH_3^+] = [OH^-] = x = 0{,}006605\ mol/L$$

$$[CH_3NH_2] = 0{,}100 - x = 0{,}100 - 0{,}006605 = 0{,}09340\ mol/L$$

$$K_b = \frac{[CH_3NH_3^+][OH^-]}{[CH_3NH_2]} = \frac{0{,}006605 \times 0{,}006605}{0{,}09340} = \mathbf{4{,}67 \times 10^{-4}}$$

Felles mekanikkdel

Oppgave 6

Skal bestemme maks høyde for en stein som kastes loddrett oppover fra bakkenivå med startfart v_{0y} på Månen der tyngdeaks. er $a_y - g$ (med positiv y-retning oppover). Bruker bevegelses-likningen

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2gy \Rightarrow y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g}$$

I punktet med størst høyde er $y = y_{max}$ og $v_y = 0$:

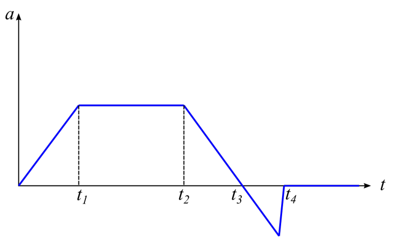
$$y_{max} = \underline{\frac{v_{0y}^2}{2g}}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$v_{0y} = 16\,\mathrm{m/s}$	$y_{max} = 80\,\mathrm{m}$
$v_{0y} = 12\,\mathrm{m/s}$	$y_{max} = 45\,\mathrm{m}$
$v_{0y} = 8,0\,\mathrm{m/s}$	$y_{max} = 20\,\mathrm{m}$

Oppgave 7

Gitt akselerasjonsgrafen:



Randomisert oppgave:

Variant	Riktig påstand
1	Farten er maksimal ved t_3
2	Farten øker mellom t_2 og t_3
2	Farten øker mellom t_1 og t_2

Oppgave 8

a) Den eneste kraften som virker på ballen under **hele** bevegelsen er tyngdekrafta, som har retning loddrett nedover. Ballen har derfor en akselerasjon som **hele tiden** er rettet loddrett nedover - også i det høyeste punktet.

b) Bestemmer tiden før legemet når gulvet; med positiv retning oppover er $y = -1,0\,\mathrm{m}$ idet den treffer gulvet. Videre blir $a_y = -g$ slik at vi brukerbevegelseslikningen

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Setter inn tall (uten enheter; tiden angis da i sekunder):

$$-1,0 = 10 \sin 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2$$

$$t = \underline{1,19\,\mathrm{s}}$$

Bevegelsen langs gulvet blir da

$$\begin{aligned} x &= v_{0x} t \\ &= v_0 \cos \alpha t \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \cos 30^\circ \cdot 1,19\,\mathrm{s} \\ &= 10,3\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{10\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

c) Fart idet den treffer gulvet:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ &= v_0 \cos \alpha \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \cos 30^\circ \\ &= \underline{8,66\,\mathrm{m/s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ &= v_0 \sin \alpha t - gt \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \sin 30^\circ - 9,81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 1,19\,\mathrm{s} \\ &= \underline{-6,67\,\mathrm{m/s}} \end{aligned}$$

Farten er da

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(8,66\,\mathrm{m/s})^2 + (-6,67\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 10,9\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{11\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

Hvis β er vinkelen mellom farten og horisontalen, er

$$\tan \beta = \left| \frac{v_y}{v_x} \right| \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \left| \frac{v_y}{v_x} \right|$$

$$\begin{aligned} \beta &= \tan^{-1} \left| \frac{-6,67\,\mathrm{m/s}}{8,66\,\mathrm{m/s}} \right| \\ &= 37,6^\circ \\ &\approx \underline{\underline{38^\circ}} \end{aligned}$$

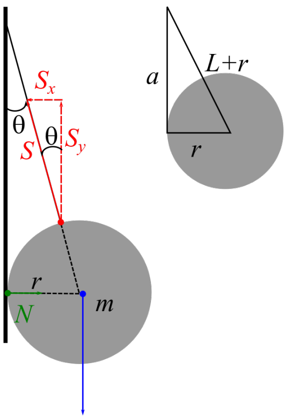
Oppgave 9

Figuren under viser kreftene som virker på ballen: tyngden $G = mg$, snorkrafta S og normalkrafta N fra veggen. N virker horisontalt (dvs. ingen vertikalkomponent) da veggen er friksjonsfri. Da viser figuren at:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_y = mg$$

Da er normalkrafta N gitt ved, fra $\sum F_x$=0:

$$\begin{aligned} N &= S_x \\ &= S_y \tan\theta \\ &= mg \tan\theta. \end{aligned}$$



Ut i fra forholdet mellom snorlengden L og kuleradien r får man, via Pytagoras', at

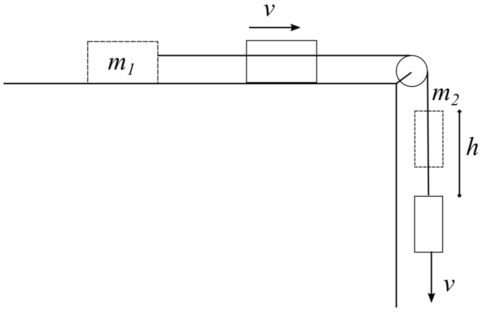
$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{r}{a} \\ &= \frac{r}{\sqrt{(L+r)^2 - r^2}} \\ &= \frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr + r^2 - r^2}} \\ &= \underline{\frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr}}} \end{aligned}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} N &= mg \tan\theta \\ &= \underline{\underline{\frac{mgr}{\sqrt{L^2 + 2Lr}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 10

Setter opp energiregnskap: den potensielle energien til klossen med masse m_2 i en høyde h over punktet der farten er v går over til kinetisk energi for de to klossene (de har hele tiden samme fart da de er forbundet med en snor):



$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$$
$$\underline{v = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1+m_2}}}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$m_1 = 4m, m_2 = m$	$v = \sqrt{\frac{2}{5}gh}$
$m_1 = 2m, m_2 = m$	$v = \sqrt{\frac{2}{3}gh}$
$m_1 = 3m, m_2 = m$	$v = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$

Oppgave 11

En bil med masse m_1 og fart v treffer en annen bil med masse m_2 som i utgangspunktet er i ro. Etter støtet blir bilene hengende sammen og beveger seg som ett legeme. Vi skal bestemme hvor stor prosentandel av den opprinnelige kinetiske energien som går tapt i kollisjonen.

Bevegelsesmengden er bevart i kollisjonen, og dette gir oss sluttfarten u til felleslegemet etter støtet:

$$\sum_{før} p = \sum_{etter} p$$
$$m_1v = (m_1+m_2)\,u$$
$$\underline{u = \frac{m_1}{m_1+m_2}v}$$

Kinetisk energi før støtet:

$$K_{før} = \frac{1}{2}m_1v^2$$

Kinetisk energi etter støtet:

$$K_{etter} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,u^2$$

Prosentvis andel som har gått tapt i kollisjonen

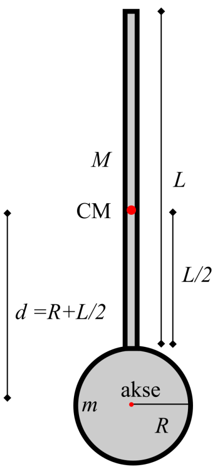
$$\begin{aligned}
\frac{K_{før} - K_{etter}}{K_{før}} &= \frac{\frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2}{\frac{1}{2}m_1 v^2} \\
&= \frac{m_1 v^2 - (m_1+m_2)u^2}{m_1 v^2} && \text{(Forkorter } \tfrac{1}{2}\text{)} \\
&= \frac{m_1 v^2 - (m_1+m_2)\cdot\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v^2}{m_1 v^2} && \text{(Setter inn for } u\text{)} \\
&= \frac{m_1 - \frac{m_1^2}{m_1+m_2}}{m_1} && \text{(Forkorter } v^2\text{)} \\
&= \underline{1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}} && \text{(Forkorter og forenkler)}
\end{aligned}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$m_1 = m, m_2 = 3m$	$\frac{3}{4} = 75\,\%$
$m_1 = m, m_2 = 2m$	$\frac{2}{3} = 67\,\%$
$m_1 = m, m_2 = m/2$	$\frac{1}{3} = 33\,\%$

Oppgave 12

Figuren under viser robotarma som består av en massiv kule med masse m og radius R, der en tynn stang med masse M og lengde L er festet. Arma roterer om aksen i sentrum av kula.



Det totale treghetsmomentet er summen av kule + stang:

$$I = I_{kule} + I_{stang}$$

Treghetsmomentet til kula om den gitte aksen kan vi lese ut fra formelarket: $I_{kule} = \frac{2}{5}mR^2$.

Treghetsmomentet til stanga finner vi ved Steiners sats:

$$I_{stang} = I_{CM} + Md^2,$$

der $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ er treghetsmomentet til stanga om massesenteret CM (midten) og d er avstanden mellom en akse gjennom CM og rotasjonsaksen (som er parallell). Som figuren viser er

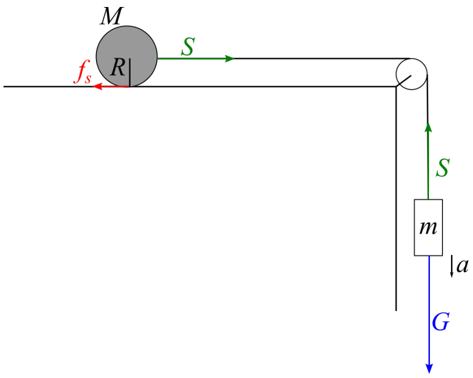
$$d = R + \frac{L}{2},$$

slik at treghetsmomentet blir

$$\begin{aligned} I &= I_{kule} + I_{stang} \\ &= I_{kule} + I_{CM} + Md^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{5}mR^2 + \frac{1}{12}ML^2 + M\left(R + \frac{L}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 13

a) Figuren under viser kreftene som virker på sylinderen og loddet etter at loddet er sluppet. Sylinderen ruller på det horisontale underlaget uten å gli.



På sylinderen virker (hvile-)friksjonen f_s og snordraget S; på loddet virker tyngden G og et like stort snordrag S som på sylinderen (når snora er masseløs).

b) Setter opp Newtons 2. lov for hvert legeme (de har samme lineære akselerasjon a ettersom de er forbundet av snora):

Loddet:

$$mg - S = ma$$

Sylinderen (translasjon):

$$S - f_s = Ma$$

Sylinderen (rotasjon om massesenteret med treghetsmoment $I{=}\frac{1}{2}MR^2$ om aksen):

$$f_s \cdot R = I\alpha,$$

der vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{a}{R}$ når sylinderen ruller uten å gli:

$$\begin{aligned} f_s \cdot R &= I\frac{a}{R} \\ f_s &= \frac{I}{R^2}a \\ &= \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R^2}a \\ &= \underline{\frac{1}{2}Ma} \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} S - f_s &= Ma \\ S &= Ma + f_s \\ S &= Ma + \frac{1}{2}Ma \\ S &= \underline{\frac{3}{2}Ma} \end{aligned}$$

Da er

$$\begin{aligned} mg - S &= ma \\ mg - \frac{3}{2}Ma &= ma \\ a\left(m + \frac{3}{2}M\right) &= mg \\ a &= \frac{m}{m + \frac{3}{2}M}g \\ &= \frac{1,0\,\mathrm{kg}}{1,0\,\mathrm{kg} + \frac{3}{2}\cdot 2,5\,\mathrm{kg}} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \\ &= 2,07\,\mathrm{m/s^2} \\ &\approx \underline{\underline{2,1\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

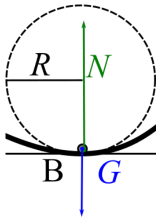
Oppgave 14

a) Når et legeme ruller uten å gli mot underlaget, er det hvilefriksjon tilstede - det er denne kraften som besørger rotasjon om massesenteret. Ettersom det ikke er noe relativbevegelse ("gliding") mellom kontaktpunktet og underlaget vil imidlertid ikke hvilefriksjonen utføre noe arbeid på legemet som ruller, og da er mekanisk energi (dvs. summen av kinetisk og potensiell energi) være konstant.

b) Energibevaring gir (potensiell energi i A går over til kinetisk energi i form av rotasjon og translasjon i punkt B):

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 && \text{(Her er } I = \tfrac{1}{2}mr^2\text{)} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 && \text{(Rullebetingelsen } v_{CM} = \omega r\text{)} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 \\ gh &= \frac{3}{4}v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{4}{3}gh} \\ &= \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 1,0\,\mathrm{m}} \\ &= 3,62\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{3,6\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

c) Figuren under viser kreftene som virker på sylinderen i det laveste punktet: normalkraften N og tyngden G, som begge virker radielt når sylinderen ansees som en punktpartikkel.



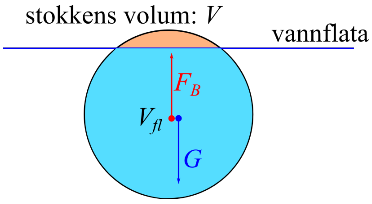
Newtons 2. lov:

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma \\
N - G &= ma \\
N - mg &= m\frac{v^2}{R} \\
N &= m\frac{v^2}{R} + mg \\
&= m \cdot \frac{\frac{4}{3}gh}{R} + mg && \text{(Setter inn for } v\text{)} \\
&= mg\left(\frac{4}{3}\frac{h}{R} + 1\right) \\
&= mg\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1,0\,\mathrm{m}}{0,50\,\mathrm{m}} + 1\right) \\
&= \frac{11}{3}mg \\
&= \frac{11}{3} \cdot 0,10\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \\
&= 3,58\,\mathrm{N} \\
&\approx \underline{\underline{3,6\,\mathrm{N}}}
\end{aligned}$$

Fluidmekanikk- og bølgefysikkdel

Oppgave 15

a) En tømmerstokk med massetetthet ρ og volum V flyter i vann med massetetthet ρ_v, der fortrengt væskevolum er lik V_f. Vi skal bestemme det prosentvise volumet av stokken som ligger under vann, dvs. forholdet V_{fl}/V. Se figuren under.



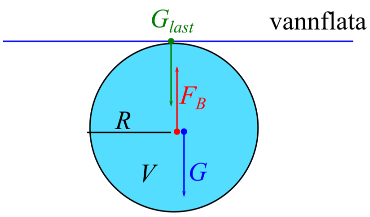
Ettersom tømmerstokket flyter i vannet, er oppdrifta $F_B = G$, slik at Arkimedes' lov gir at

$$F_B = \rho_v V_{fl} g = mg$$
$$\rho_v V_{fl} g = \rho V g \qquad \text{(Def. av massetetthet)}$$
$$\frac{V_{fl}}{V} = \underline{\frac{\rho}{\rho_v}}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$\rho_v = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho = 400\,\mathrm{kg/m^3}$	$V_{fl}/V = 39,0\,\%$
$\rho_v = 997\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho = 500\,\mathrm{kg/m^3}$	$V_{fl}/V = 50,2\,\%$
$\rho_v = 997\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho = 600\,\mathrm{kg/m^3}$	$V_{fl}/V = 60,2\,\%$

b) Skal bestemme maksimal last m_{last} tømmerstokken kan bære uten å synke, dvs. idet fortrengt væskevolum er lik stokkens volum V. Se figuren under.



Newtons 1. lov sammen med Arkimedes' lov gir:

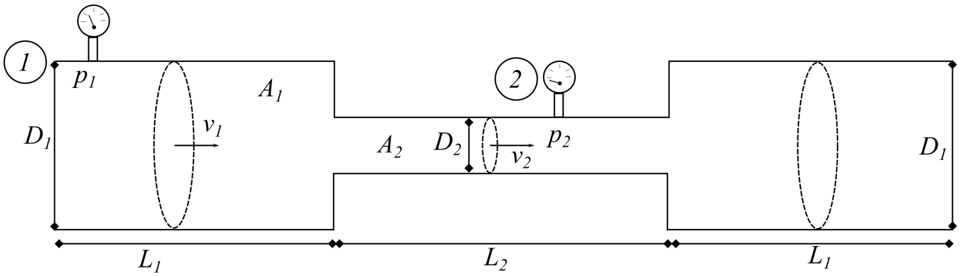
$$G_{last} + G = F_B$$
$$m_{last} g + mg = \rho_v V g$$
$$m_{last} + \rho V = \rho_v V$$
$$m_{last} = (\rho_v - \rho)\, V$$
$$= \underline{(\rho_v - \rho) \cdot \pi R^2 h} \qquad \text{(Volum av sylinder med høyde } h\text{)}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$\rho_v = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho = 400\,\mathrm{kg/m^3}$, $r = 0,20\,\mathrm{m}$, $h = 2,0\,\mathrm{m}$	$m_{last} = 157\,\mathrm{kg}$
$\rho_v = 997\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho = 500\,\mathrm{kg/m^3}$, $r = 0,10\,\mathrm{m}$, $h = 1,0\,\mathrm{m}$	$m_{last} = 15,6\,\mathrm{kg}$
$\rho_v = 997\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho = 600\,\mathrm{kg/m^3}$, $r =0,30\,\mathrm{m}$, $h = 1,5\,\mathrm{m}$	$m_{last} = 168\,\mathrm{kg}$

Oppgave 16

a) Figuren under viser væske som strømmer fra punkt 1 (bred rørdel) der væskefarten er v_1 og trykket p_1, til punkt 2 (innsneveringen) der væskefart og trykk er hhv. v_2 og p_2:



Bernoullis likning uten tapsledd:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Ettersom røret er horisontalt er $y_1 = y_2$ og likningen forenkles:

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) &= p_1 - p_2 \end{aligned}$$

Kontinuitetslikningen:

$$\begin{aligned} A_1 v_1 &= A_2 v_2 \\ \pi\frac{D_1^2}{4}v_1 &= \pi\frac{D_2^2}{4}v_2 \\ v_1 &= \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 v_2 \end{aligned}$$

Setter inn for v_1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - \left(\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 v_2\right)^2\right) &= p_1 - p_2 \\ \frac{1}{2}\rho v_2^2\left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right) &= p_1 - p_2 \\ v_2 &= \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\left(p_1 - p_2\right)}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{2}{1{,}0\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}}\cdot 90\cdot 10^3\,\mathrm{Pa}}{1 - \left(\frac{1{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}0\,\mathrm{m}}\right)^4}} \\ &= 13{,}9\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{14\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

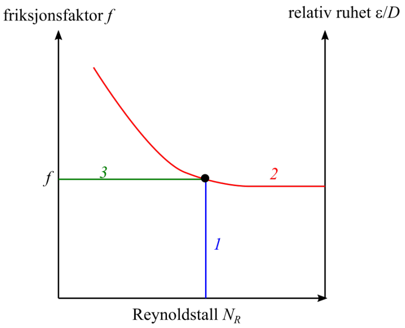
b) Moodys diagram brukes til å bestemme friksjonsfaktoren f for et rør med gitt ruhet ϵ (angitt i mm) og med et bestemt Reynoldstall. Friksjonsfaktoren har en komplisert avhengighet av disse parametrene, spesielt ettersom f avhenger av sterkt av Reynoldstallet, dvs. hvorvidt strømmen er laminær eller turbulent.

For en gitt fluidstrøm er prosedyren for å bruke Moodys diagram slik:

1) Beregn Reynoldstallet N_R og marker dette med en vertikal linje på x-aksen i diagrammet

2) Beregn relativ ruhet ϵ/D for røret og marker dette med en (krum) linje som følger verdien av ϵ/D til høyre i diagrammet

3) Finn skjæringspunktet mellom kurvene i 1) og 2) og dra en horisontal linje fra skjæringspunktet til y-aksen, der friksjonsfaktoren$f$ avleses, som illustrert på figuren under.



c) Bestemmer friksjonsfaktorene f_1 og f_2 for hhv. bred og smal del av røret:

Bred del: farten her er

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 v_2 \qquad \text{(Fra kontinuitetslikningen over)} \\ &= \left(\frac{1,0\,\mathrm{m}}{2,0\,\mathrm{m}}\right)^2 \cdot 13,9\,\mathrm{m/s} \\ &= \underline{3,48\,\mathrm{m/s}} \end{aligned}$$

Reynoldstallet her er

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{\rho v_1 D_1}{\eta} \\ &= \frac{1,0\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 3,48\,\mathrm{m/s}\cdot 2,0\,\mathrm{m}}{8,90\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pa\cdot s}} \\ &= \underline{7,8\cdot 10^6} \end{aligned}$$

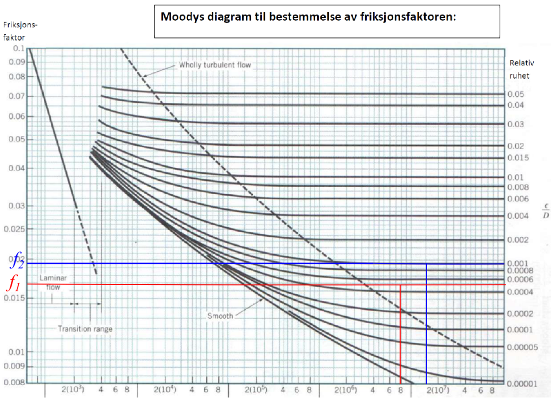
Relativ ruhet er $\epsilon/D_1 = 1,0\,\mathrm{mm}/2,0\,\mathrm{m} = 1,0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}/2,0\,\mathrm{m} = \underline{5\cdot 10^{-4}}$.

Smal del: Reynoldstallet er

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{\rho v_2 D_2}{\eta} \\ &= \frac{1,0\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 13,9\,\mathrm{m/s}\cdot 1.0\,\mathrm{m}}{8,90\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pa\cdot s}} \\ &= \underline{1,6\cdot 10^7} \end{aligned}$$

Relativ ruhet er $\epsilon/D_2 = 1,0\,\mathrm{mm}/1,5\,\mathrm{m} = 1,0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}/1,0\,\mathrm{m} = \underline{1\cdot 10^{-3}}$.

Leser av friksjonsfaktorene f_1 (rød) og f_2 (blå) i Moodys diagram:



Får at

$$f_1 \approx \underline{\underline{0,017}},\ f_2 \approx \underline{\underline{0,019}}$$

d) Tapshøydene på grunn av rørfriksjon i hhv. de to brede og den smale delen er av røret er gitt ved

$$h_1 = f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g},\ h_2 = f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g}$$

Får her at

$$\begin{aligned} h_1 &= 0,017 \cdot \frac{90\,\mathrm{m}}{2,0\,\mathrm{m}} \cdot \frac{(3,48\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= \underline{0,47\,\mathrm{m}} \end{aligned}$$

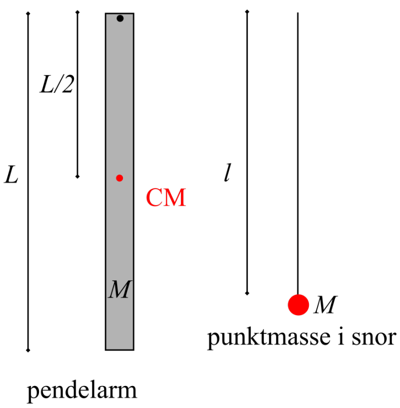
$$\begin{aligned} h_2 &= 0,019 \cdot \frac{30\,\mathrm{m}}{1,0\,\mathrm{m}} \cdot \frac{(13,9\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= \underline{5,6\,\mathrm{m}} \end{aligned}$$

Den totale tapshøyden for rørledningen (to brede deler og en smal) er altså

$$\begin{aligned} h &= 2h_1 + h_2 \\ &= 2 \cdot 0,47\,\mathrm{m} + 5,6\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{6,5\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 17

Figuren under viser de to pendlene som skal ha samme svingetid: en tynn stang med masse M og lengde L som svinger om den ene enden, og en punktmasse M som svinger i en masseløs snor med lengde l.



Svingetida til en fysisk pendel (pendelarma) er gitt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

der $I = \frac{1}{3}ML^2$ og avstanden h mellom tyngdepunktet og opphengingspunktet er $h = \frac{L}{2}$. Det gir

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg \cdot \frac{L}{2}}} \\ &= \underline{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}} \end{aligned}$$

For en enkel/matematisk pendel (punktmasse i masseløs snor) er svingetid

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Svingetiden skal være den samme, dvs. at

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} &= 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}} \\ l &= \underline{\frac{2}{3}L} \qquad \text{(Kvadrerer)} \end{aligned}$$

Randomisert oppgave (massen M har ikke betydning for oppgaven):

Variant	Tallverdi
$L = 1,2\,\mathrm{m}$	$l = 0,80\,\mathrm{m}$
$L = 2,0\,\mathrm{m}$	$l = 1,3\,\mathrm{m}$
$L = 1,0\,\mathrm{m}$	$l = 0,67\,\mathrm{m}$

Oppgave 18

Amplituden til en (svakt) dempet svingning som funksjon av tiden er gitt ved

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t},$$

der A_0 er amplituden ved $t = 0$, b er dempingskontanten og m er massen til det svingende legemet. For å påvise at det er svak demping, er kriteriet at

$$\frac{b}{2m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

der k er fjærkonstanten. For alle de randomiserte variantene kan man verifisere at betingelsen for svak demping er oppfylt.

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$m = 1,0\,\mathrm{kg},\ k = 50\,\mathrm{N/m},\ b = 0,20\,\mathrm{kg/s},\ A_0 = 0,50\,\mathrm{m},\ t = 3,0\,\mathrm{s}$	$A(t) = 0,37\,\mathrm{m}$
$m = 2,0\,\mathrm{kg},\ k = 80\,\mathrm{N/m},\ b = 0,30\,\mathrm{kg/s},\ A_0 = 0,20\,\mathrm{m},\ t = 2,0\,\mathrm{s}$	$A(t) = 0,17\,\mathrm{m}$
$m = 0,50\,\mathrm{kg},\ k = 50\,\mathrm{N/m},\ b = 0,10\,\mathrm{kg/s},\ A_0 = 0,40\,\mathrm{m},\ t = 5,0\,\mathrm{s}$	$A(t) = 0,24\,\mathrm{m}$

Oppgave 19

Vi får gitt en sinusformet tversbølge på formen

$$y(x,t) = A\sin(kx+\omega t)\,,$$

og skal vurdere hvilken av et sett med påstander som er riktig.

Essensielle sammenhenger i denne oppgaven er at bølgetallet $k = 2\pi/\lambda$, vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi/T$, bølgefarten er $v = \omega/k$ og maksimal fart i y-retning bestemmes fra

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = A\cos(kx+\omega t)\cdot\omega \\ &= A\omega\cos(kx+\omega t)\,, \end{aligned}$$

slik at den maksimale farten i y-retning oppnås når cosinus er lik ± 1, dvs.

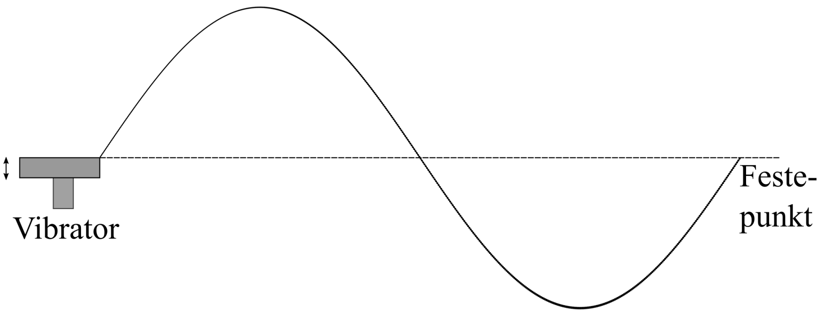
$$v_{y,maks} = \underline{A\omega}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Riktig påstand
$y(x,t) = 1,2\,\mathrm{m}\sin\left(0,20\,\mathrm{m}^{-1}x + 0,40\,\mathrm{s}^{-1}t\right)$	$v_{y,maks} = 1,2\,\mathrm{m}\cdot 0,40\,\mathrm{s} = 0,48\,\mathrm{m/s}$
$y(x,t) = 1,0\,\mathrm{m}\sin\left(0,10\,\mathrm{m}^{-1}x + 0,10\,\mathrm{s}^{-1}t\right)$	$v_{y,maks} = 1,0\,\mathrm{m}\cdot 0,10\,\mathrm{s} = 0,10\,\mathrm{m/s}$
$y(x,t) = 2,0\,\mathrm{m}\sin\left(0,10\,\mathrm{m}^{-1}x + 0,20\,\mathrm{s}^{-1}t\right)$	$v_{y,maks} = 2,0\,\mathrm{m}\cdot 0,20\,\mathrm{s} = 0,40\,\mathrm{m/s}$

Oppgave 20

a) Vi får oppgitt at en gitarstreng med lineær massetetthet μ og lengde L får et stående bølgemønster ved en frekvens f_n (tilsvarende et ordenstall n) som har form som figuren under:



Ettersom denne har 3 nullpunkter/noder, innser vi at dette må tilsvare et ordenstall $n = 2$ (etter $n = 1$ har 2 nullpunkt; ett i hver ende - her er det ett ekstra ullpunkt).

Snorstrammingen/"tension" i strengen er gitt fra uttrykket for bølgefarten:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ F_T &= \underline{\mu v^2}, \end{aligned}$$

der bølgefarten v også er gitt fra sammenhengen

$$\begin{aligned} f_n &= n\frac{v}{2L} \\ v &= \underline{\frac{2f_nL}{n}} \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} F_T &= \mu v^2 \\ &= \mu \cdot \left(\frac{2f_nL}{n}\right)^2 \\ &= \underline{\mu \cdot (f_2L)^2} \end{aligned} \qquad \text{(Her er ordenstallet } n = 2\text{)}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallsvar
$f_2 = 180\,\mathrm{Hz},\ L = 0,50\,\mathrm{m},\ \mu = 0,0012\,\mathrm{kg/m}$	$F_T = 9,7\,\mathrm{N} \approx 10\,\mathrm{N}$
$f_2 = 220\,\mathrm{Hz},\ L = 0,80\,\mathrm{m},\ \mu = 0,0020\,\mathrm{kg/m}$	$F_T = 62\,\mathrm{N}$
$f_2 = 200\,\mathrm{Hz},\ L = 1,0\,\mathrm{m},\ \mu = 0,0015\,\mathrm{kg/m}$	$F_T = 60\,\mathrm{N}$

b) Vi skal bestemme neste frekvens som gir stående bølgemønster. I forrige oppgave konstaterte vi at vi så 2. ordens bølgemønster, dvs. $n = 2$. Ut i fra sammenhengen

$$\begin{aligned} f_n &= nf_1 \qquad \text{(Generelt for ordestall } n\text{)} \\ f_2 &= 2f_1 \\ f_1 &= \underline{\frac{f_2}{2}} \end{aligned}$$

Neste ordens frekvens som gir stående bølge blir da $f_3 = 3f_1$.

Randomisert oppgave:

Variant	Tallsvar
$f_2 = 180\,\mathrm{Hz}$, slik at $f_1 = 90\,\mathrm{Hz}$	$f_3 = 270\,\mathrm{Hz}$
$f_2 = 220\,\mathrm{Hz}$, slik at $f_1 = 110\,\mathrm{Hz}$	$f_3 = 330\,\mathrm{Hz}$
$f_2 = 200\,\mathrm{Hz}$, slik at $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$	$f_3 = 300\,\mathrm{Hz}$