

Felles mekanikkdel

Oppgave 1

Skal bestemme maks høyde for en stein som kastes loddrett oppover fra bakkenivå med startfart v_{0y} på Månen der tyngdeaks. er $a_y = -g$ (med positiv y -retning oppover). Bruker bevegelseslikningen

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2gy \Rightarrow y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g}$$

I punktet med størst høyde er $y = y_{max}$ og $v_y = 0$:

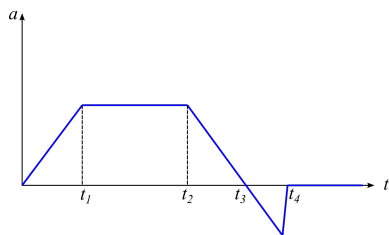
$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$v_{0y} = 16 \text{ m/s}$	$y_{max} = 80 \text{ m}$
$v_{0y} = 12 \text{ m/s}$	$y_{max} = 45 \text{ m}$
$v_{0y} = 8,0 \text{ m/s}$	$y_{max} = 20 \text{ m}$

Oppgave 2

Gitt akselerasjonsgraf:



Randomisert oppgave:

Variant	Riktig påstand
1	Farten er maksimal ved t_3
2	Farten øker mellom t_2 og t_3
2	Farten øker mellom t_1 og t_2

Oppgave 3

a) Den eneste kraften som virker på ballen under **hele** bevegelsen er tyngdekrafta, som har retning loddrett nedover. Ballen har derfor en akselerasjon som **hele tiden** er rettet loddrett nedover - også i det høyeste punktet.

b) Bestemmer tiden før legemet når gulvet; med positiv retning oppover er $y = -1,0 \text{ m}$ idet den treffer gulvet. Videre blir $a_y = -g$ slik at vi bruker bevegelseslikningen

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Setter inn tall (uten enheter; tiden angis da i sekunder):

$$-1,0 = 10 \sin 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2$$

$$t = \underline{1,19 \text{ s}}$$

Bevegelsen langs gulvet blir da

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ &= v_0 \cos \alpha t \\ &= 10 \text{ m/s} \cos 30^\circ \cdot 1,19 \text{ s} \\ &= 10,3 \text{ m} \\ &\approx \underline{10 \text{ m}} \end{aligned}$$

c) Fart idet den treffer gulvet:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ &= v_0 \cos \alpha \\ &= 10 \text{ m/s} \cos 30^\circ \\ &= \underline{8,66 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ &= v_0 \sin \alpha t - gt \\ &= 10 \text{ m/s} \sin 30^\circ - 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,19 \text{ s} \\ &= \underline{-6,67 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Farten er da

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(8,66 \text{ m/s})^2 + (-6,67 \text{ m/s})^2} \\ &= 10,9 \text{ m/s} \\ &\approx \underline{11 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Hvis β er vinkelen mellom farten og horisontalen, er

$$\tan \beta = \left| \frac{v_y}{v_x} \right| \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \left| \frac{v_y}{v_x} \right|$$

$$\begin{aligned} \beta &= \tan^{-1} \left| \frac{-6,67 \text{ m/s}}{8,66 \text{ m/s}} \right| \\ &= 37,6^\circ \\ &\approx \underline{38^\circ} \end{aligned}$$

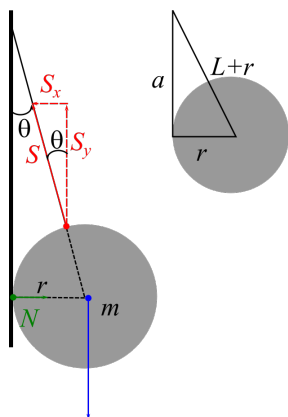
Oppgave 4

Figuren under viser kreftene som virker på ballen: tyngden $G = mg$, snorkrafta S og normalkrafta N fra veggen. N virker horisontalt (dvs. ingen vertikalkomponent) da veggen er friksjonsfri. Da viser figuren at:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_y = mg$$

Da er normalkrafta N gitt ved, fra $\sum F_x = 0$:

$$\begin{aligned} N &= S_x \\ &= S_y \tan \theta \\ &= mg \tan \theta. \end{aligned}$$



Ut i fra forholdet mellom snorlengden L og kuleradien r får man, via Pytagoras', at

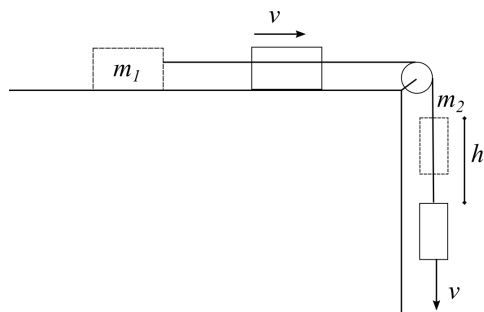
$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{r}{a} \\ &= \frac{r}{\sqrt{(L+r)^2 - r^2}} \\ &= \frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr + r^2 - r^2}} \\ &= \frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr}} \end{aligned}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} N &= mg \tan \theta \\ &= \frac{mgr}{\sqrt{L^2 + 2Lr}} \end{aligned}$$

Oppgave 5

Setter opp energiregnskap: den potensielle energien til klossen med masse m_2 i en høyde h over punktet der farten er v går over til kinetisk energi for de to klossene (de har hele tiden samme fart da de er forbundet med en snor):



$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1 + m_2}}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$m_1 = 4m, m_2 = m$	$v = \sqrt{\frac{2}{5}gh}$
$m_1 = 2m, m_2 = m$	$v = \sqrt{\frac{2}{3}gh}$
$m_1 = 3m, m_2 = m$	$v = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$

Oppgave 6

En bil med masse m_1 og fart v treffer en annen bil med masse m_2 som i utgangspunktet er i ro. Etter støtet blir bilene hengende sammen og beveger seg som ett legeme. Vi skal bestemme hvor stor prosentandel av den opprinnelige kinetiske energien som går tapt i kollisjonen.

Bevegelsesmengden er bevart i kollisjonen, og dette gir oss slutfarten u til felleslegemet etter støtet:

$$\sum_{f\ddot{o}r} p = \sum_{etter} p$$

$$m_1v = (m_1 + m_2)u$$

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v$$

Kinetisk energi før støtet:

$$K_{f\ddot{o}r} = \frac{1}{2}m_1v^2$$

Kinetisk energi etter støtet:

$$K_{etter} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

Prosentvis andel som har gått tapt i kollisjonen

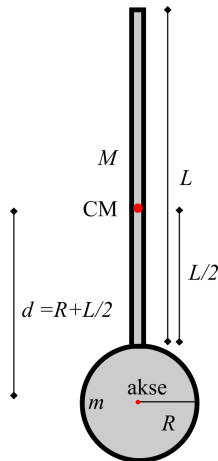
$$\begin{aligned} \frac{K_{f\phi r} - K_{etter}}{K_{f\phi r}} &= \frac{\frac{1}{2}m_1v^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2}{\frac{1}{2}m_1v^2} \\ &= \frac{m_1v^2 - (m_1 + m_2)u^2}{m_1v^2} && \text{(Forkorter } \frac{1}{2}) \\ &= \frac{m_1v^2 - (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v^2}{m_1v^2} && \text{(Setter inn for } u) \\ &= \frac{m_1 - \frac{m_1^2}{m_1+m_2}}{m_1} && \text{(Forkorter } v^2) \\ &= 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} && \text{(Forkorter og forenkler)} \end{aligned}$$

Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$m_1 = m, m_2 = 3m$	$\frac{3}{4} = 75\%$
$m_1 = m, m_2 = 2m$	$\frac{2}{3} = 67\%$
$m_1 = m, m_2 = m/2$	$\frac{1}{3} = 33\%$

Oppgave 7

Figuren under viser robotarma som består av en massiv kule med masse m og radius R , der en tynn stang med masse M og lengde L er festet. Arma roterer om aksene i sentrum av kula.



Det totale treghetsmomentet er summen av kule + stang:

$$I = I_{kule} + I_{stang}$$

Treghetsmomentet til kula om den gitte aksene kan vi lese ut fra formelarket: $I_{kule} = \frac{2}{5}mR^2$.

Treghetsmomentet til stanga finner vi ved Steiners sats:

$$I_{stang} = I_{CM} + Md^2,$$

der $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ er treghetsmomentet til stanga om massesenteret CM (midten) og d er avstanden mellom en akse gjennom CM og rotasjonsaksen (som er parallell). Som figuren viser er

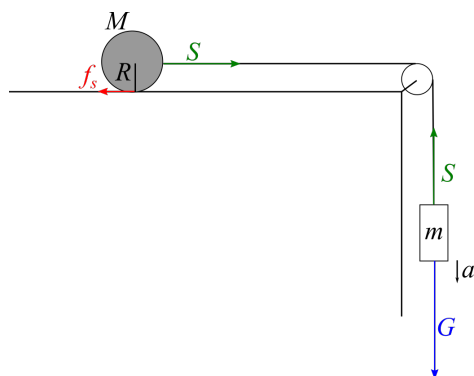
$$d = R + \frac{L}{2},$$

slik at treghetsmomentet blir

$$\begin{aligned}
 I &= I_{kule} + I_{stang} \\
 &= I_{kule} + I_{CM} + Md^2 \\
 &= \frac{2}{5}mR^2 + \frac{1}{12}ML^2 + M\left(R + \frac{L}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

Oppgave 8

a) Figuren under viser kreftene som virker på sylinderen og loddet etter at loddet er sluppet. Sylinderen ruller på det horisontale underlaget uten å gli.



På sylinderen virker (hvile-)friksjonen f_s og snordraget S ; på loddet virker tyngden G og et like stort snordrag S som på sylinderen (når snora er masseløs).

b) Setter opp Newtons 2. lov for hvert legeme (de har samme lineære akselerasjon a ettersom de er forbundet av snora):

Loddet:

$$mg - S = ma$$

Sylinderen (translasjon):

$$S - f_s = Ma$$

Sylinderen (rotasjon om massesenteret med treghetsmoment $I = \frac{1}{2}MR^2$ om aksen):

$$f_s \cdot R = I\alpha,$$

der vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{a}{R}$ når sylinderen ruller uten å gli:

$$\begin{aligned}
 f_s \cdot R &= I \frac{a}{R} \\
 f_s &= \frac{I}{R^2} a \\
 &= \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R^2} a \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{2}Ma}}
 \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} S - f_s &= Ma \\ S &= Ma + f_s \\ S &= Ma + \frac{1}{2}Ma \\ S &= \underline{\underline{\frac{3}{2}Ma}} \end{aligned}$$

Da er

$$\begin{aligned} mg - S &= ma \\ mg - \frac{3}{2}Ma &= ma \\ a \left(m + \frac{3}{2}M \right) &= mg \\ a &= \frac{m}{m + \frac{3}{2}M}g \\ &= \frac{1,0 \text{ kg}}{1,0 \text{ kg} + \frac{3}{2} \cdot 2,5 \text{ kg}} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \\ &= 2,07 \text{ m/s}^2 \\ &\approx \underline{\underline{2,1 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

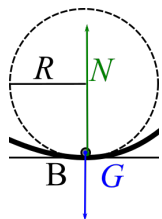
Oppgave 9

a) Når et legeme ruller uten å gli mot underlaget, er det hvilefriksjon tilstede - det er denne kraften som besørger rotasjon om massesenteret. Etersom det ikke er noe relativbevegelse ("gliding") mellom kontaktpunktet og underlaget vil imidlertid ikke hvilefriksjonen utføre noe arbeid på legemet som ruller, og da er mekanisk energi (dvs. summen av kinetisk og potensiell energi) være konstant.

b) Energibevaring gir (potensiell energi i A går over til kinetisk energi i form av rotasjon og translasjon i punkt B):

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 && \text{(Her er } I = \frac{1}{2}mr^2\text{)} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 && \text{(Rullebetingelsen } v_{CM} = \omega r\text{)} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 \\ gh &= \frac{3}{4}v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{4}{3}gh} \\ &= \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,0 \text{ m}} \\ &= 3,62 \text{ m/s} \\ &\approx \underline{\underline{3,6 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

c) Figuren under viser kreftene som virker på sylindren i det laveste punktet: normalkraften N og tyngden G , som begge virker radielt når sylindren ansees som en punktpartikkel.



Newtons 2. lov:

$$\begin{aligned}
 \sum F &= ma \\
 N - G &= ma \\
 N - mg &= m \frac{v^2}{R} \\
 N &= m \frac{v^2}{R} + mg \\
 &= m \cdot \frac{\frac{4}{3}gh}{R} + mg && \text{(Setter inn for } v) \\
 &= mg \left(\frac{4}{3} \frac{h}{R} + 1 \right) \\
 &= mg \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1,0 \text{ m}}{0,50 \text{ m}} + 1 \right) \\
 &= \frac{11}{3} mg \\
 &= \frac{11}{3} \cdot 0,10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \\
 &= 3,58 \text{ N} \\
 &\approx \underline{\underline{3,6 \text{ N}}}
 \end{aligned}$$

Elektromagnetisme

Oppgave 10

Vi skal vurdere hvorvidt et sett med påstander om den elektriske kraften $\vec{F}_e = q\vec{E}$ på en elektrisk ladd partikkel som befinner seg i et ytre elektrisk felt \vec{E} , er riktige eller gale.

a) har aldri samme retning som det elektriske feltet.

Galt, ut i fra definisjonen av el. felt har \vec{F}_e og \vec{E} samme retning dersom ladningen er positiv.

b) har i noen tilfeller retning motsatt av det elektriske feltet.

Riktig, i de tilfellene der ladningen er negativ.

c) er uavhengig av ladningens absoluttverdi.

Galt, den elektriske kraften er proporsjonal med ladningen.

d) er den samme som på en partikkel med dobbelt så stor ladning og en fart som er halvparten så stor.

Galt, elektrisk kraft er uavhengig av farten.

e) har alltid samme retning som farten.

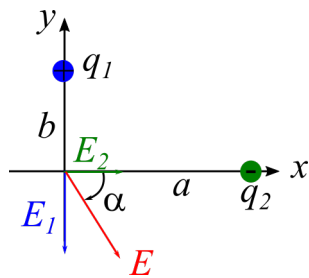
Galt, den elektriske kraften bestemmes av retningen til det elektriske feltet (og hvorvidt ladningen er positiv/negativ).

f) er uavhengig av partikkelens masse.

Riktig, den elektriske kraften avhenger av partikkelens ladning, ikke massen.

Oppgave 11

a) Figuren under viser bidragene fra de to punktladningene til det totale elektriske feltet i origo.



Absoluttverdien av de to bidragene E_1 og E_2 fra hhv. q_1 og q_2 er gitt fra Coulombs lov:

$$E_1 = \frac{kq_1}{a^2}, E_2 = \frac{kq_2}{b^2}$$

Det totale feltet er da

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{kq_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{kq_2}{b^2}\right)^2} \\
 &= k\sqrt{\left(\frac{q_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{b^2}\right)^2} \\
 &= 8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \sqrt{\left(\frac{3,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{(2,0 \text{ m})^2}\right)^2 + \left(\frac{5,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{(3,0 \text{ m})^2}\right)^2} \\
 &= 87,0 \text{ N/C} \\
 &\approx \underline{\underline{87 \text{ N/C}}}
 \end{aligned}$$

Retningen er gitt ved vinkelen α på figuren:

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{E_1}{E_2} \\
 &= \frac{q_1}{q_2} \left(\frac{b}{a}\right)^2
 \end{aligned}$$

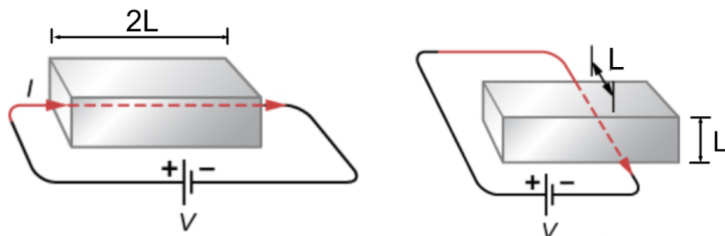
$$\begin{aligned}
 \alpha &= \tan^{-1} \frac{3,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{5,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}} \cdot \left(\frac{3,0 \text{ m}}{2,0 \text{ m}}\right)^2 \\
 &= 50,8^\circ \\
 &\approx \underline{\underline{51^\circ}}
 \end{aligned}$$

b) Den elektriske kraften på en positiv ladning q_0 i origo vil da ha samme retning som det elektriske feltet i origo (se forrige oppgave). Absoluttverdien av krafta er gitt ved

$$\begin{aligned}
 F_e &= q_0 E \\
 &= 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 87 \text{ N/C} \\
 &= \underline{\underline{8,7 \cdot 10^{-8} \text{ N}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 12

Gitt de to lederne på figuren under:



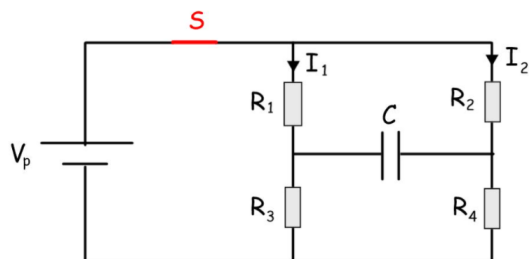
Ut i fra teorien for resistans vet vi at resistansen til en leder er proporsjonal med lengden av lederen (lang leder gir stor resistans) og omvendt proporsjonal med tverrsnittet til lederen (stort tverrsnitt gir liten resistans):

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Det er klart ut i fra figuren at lederen til **venstre** har størst lengde (lik $2L$) og minst tverrsnitt (lik L^2)- og vil derfor ha høyest resistans.

Oppgave 13

a) Gitt kretsen på figuren under:



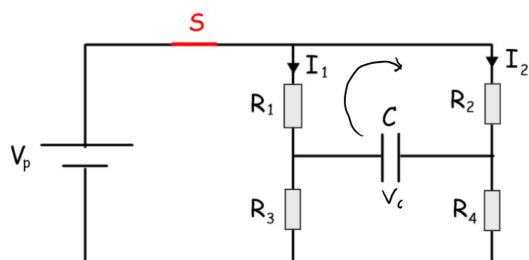
Ettersom kondensatoren er maksimalt oppladet, går det ikke noe strøm gjennom den - og vi trenger ikke å ta hensyn til den når vi skal beregne strømmene i kretsen. Kretsen kan da reduseres til en parallellkobling med to greiner; én med strøm I_1 og resistans $R_1 + R_3$, og én med strøm I_2 og resistans $R_2 + R_4$ i den andre.

Strømmene I_1 og I_2 er da gitt fra Ohms lov (spenningen over parallellkoblinga er lik spenningen V_p over batteriet):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_p}{R_1 + R_3} \\ &= \frac{10 \text{ V}}{1,0 \Omega + 4,0 \Omega} \\ &= \underline{\underline{2,0 \text{ A}}} \end{aligned}$$

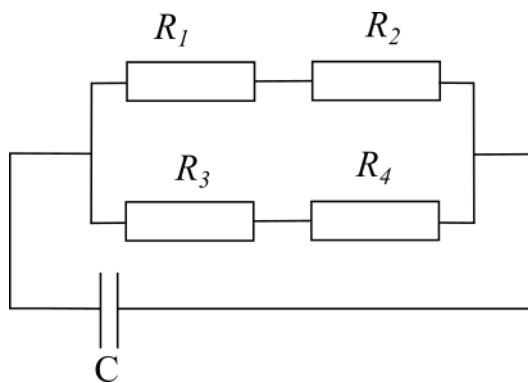
$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_p}{R_2 + R_4} \\ &= \frac{10 \text{ V}}{8,0 \Omega + 2,0 \Omega} \\ &= \underline{\underline{1,0 \text{ A}}} \end{aligned}$$

b) Vi kan finne spenningen over kondensatoren ved Kirchoffs 2. lov, som indikert på figuren under:



$$\begin{aligned} V_C + I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0 \\ V_C &= I_2 R_2 - I_1 R_1 \\ &= 1,0 \text{ A} \cdot 8,0 \Omega - 2,0 \text{ A} \cdot 1,0 \Omega \\ &= \underline{\underline{6,0 \text{ V}}} \end{aligned}$$

c) Når bryteren S er åpen slik at batteriet er koblet bort, vil kondensatoren lades ut gjennom motstandene i kretsen. Kretsen kan forenkles slik:



Den totale resistansen i kretsen blir da gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \\ R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1,0\Omega + 8,0\Omega} + \frac{1}{4,0\Omega + 2,0\Omega}} \\ &= \underline{3,60\Omega} \end{aligned}$$

Kapasitansen til kondensatoren er definert som

$$C = \frac{Q}{V_C} \Rightarrow V_C = \frac{Q}{C}$$

Ladningen $Q(t)$ på en kondensator som har ladningen Q ved $t = 0$ er under utladning gitt ved

$$Q(t) = Qe^{-\frac{t}{\tau}},$$

der tidskonstanten $\tau = RC$. Dette betyr at spenningen over kondensatoren da er gitt ved (her er V_C spenningen over kondensatoren ved $t = 0$)

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \\ &= \frac{Q}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \underline{V_C e^{-\frac{t}{\tau}}} \end{aligned}$$

Vi skal bestemme hvor lang tid det tar før spenningen over kondensatoren er $0,10V_C$:

$$\begin{aligned} V_C(t) &= 0,10V_C \\ V_C e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0,10V_C \\ e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0,10 \\ -\frac{t}{\tau} &= \ln 0,10 \\ t &= -\tau \ln 0,10 \\ &= -RC \ln 0,10 \\ &= -3,60\Omega \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot \ln 0,10 \\ &= 8,29 \cdot 10^{-5} \text{ s} \\ &\approx \underline{8,3\mu\text{s}} \end{aligned}$$

Oppgave 14

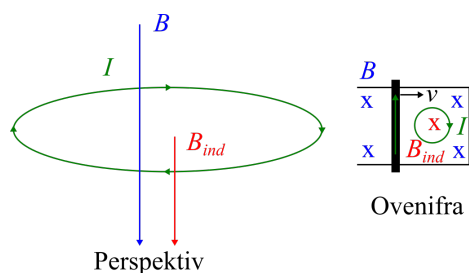
a) Den induerte emsen mellom endene av staven er gitt ved

$$\varepsilon = vBL$$

Når resistansen i sløyfa er R gir den induerte emsen oppgav til en induert strøm gitt fra Ohms lov:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\varepsilon}{R} \\ &= \frac{vBL}{R} \\ &= \frac{10 \text{ m/s} \cdot 0,30 \text{ T} \cdot 1,0 \text{ m}}{5,0 \Omega} \\ &= \underline{\underline{0,60 \text{ A}}} \end{aligned}$$

b) Ettersom sløyfearalet avtar med tiden, vil den induerte emsen sette opp et magnetfelt med samme retning som det ytre magnetfeltet. Ut i fra høyrehåndsregelen for magnetfelt generert av strømsløyfe blir da retningen med klokka, som vist på figuren under.



c) Magnetkraften på en strømførende leder med lengde L som fører en strøm I i et ytre magnetfelt B er gitt ved

$$\begin{aligned} F_m &= ILB \\ &= 1,0 \text{ A} \cdot 1,0 \text{ m} \cdot 0,30 \text{ T} \\ &= \underline{\underline{0,30 \text{ N}}} \end{aligned}$$

d) Retningen til denne krafta kan vi finne fra høyrehåndsregelen for magnetkraft på leder:

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$$

der strømretningen er som antydnet i b).

Magnetkrafta vil da gå mot venstre, dvs. **mot fartsretningen**.

Oppgave 15

Det totale dreiemomentet på en strømførende sløyfe med areal A og strøm I i et ytre magnetfelt B er gitt ved

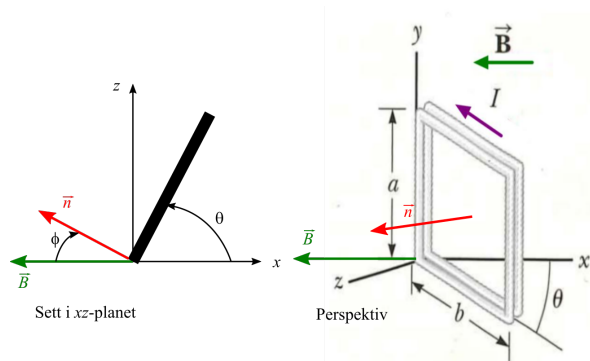
$$\tau = IAB \sin \phi,$$

der ϕ er vinkelen mellom sløyfas normalvektor \vec{n} og det ytre magnetfeltet \vec{B} (se tegning på formelarket).

For en spole med N vindinger blir totalt dreiemoment

$$\tau = NIAB \sin \phi.$$

Bestemmer vinkel ϕ ut i fra figuren under¹:



Ser at $\phi = 180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - 40,0^\circ = \underline{50,0^\circ}$.

Får her at

$$\begin{aligned} \tau &= 100 \cdot 2,20 \text{ A} \cdot 0,400 \text{ m} \cdot 0,300 \text{ m} \cdot 0,800 \text{ T} \cdot \sin 50,0^\circ \\ &= \underline{\underline{16,2 \text{ Nm}}} \end{aligned}$$

¹Hvis du blir forvirret av figuren, kan det hjelpe å innse at dersom $\theta = 0$, ville vinkelen ϕ ha vært 90° , dvs. $\vec{B} \perp \vec{N}$. Når sløyfa så roteres en vinkel θ , vil vinkelen ϕ avta tilsvarende.