Felles mekanikkdel

Oppgave 1

Skal bestemme tiden det tar før en kule som kastes horisontalt ut fra et bord i høyde h, treffer bakken. Med neglisjerbar luftmotstand er akselerasjonen i y-retningen (vertikalretningen) lik g,og med null startfart i y-retning får vi bevegelseslikningen

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

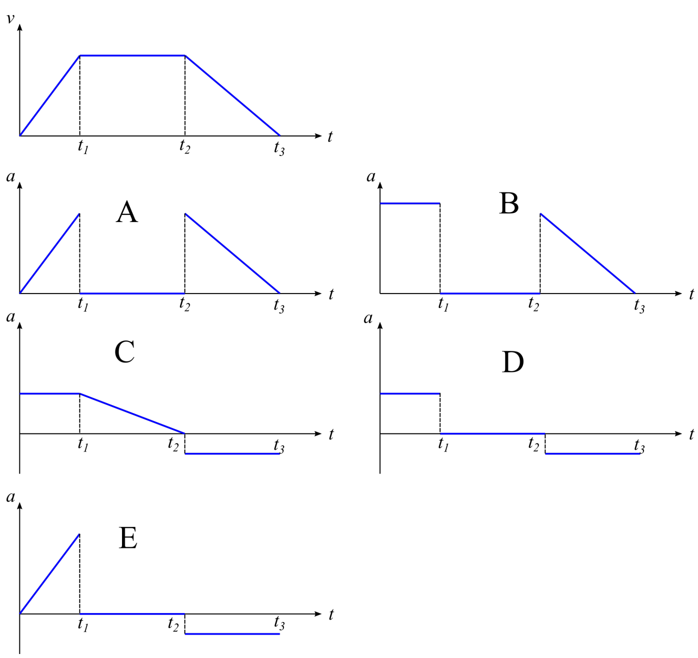
Randomisert oppgave:

Variant	Tallverdi
$h = 1,0\,\mathrm{m}$	$t = 0,45\,\mathrm{s}$
$h = 1,5\,\mathrm{m}$	$t = 0,55\,\mathrm{s}$
$h = 1,9\,\mathrm{m}$	$t = 0,62\,\mathrm{s}$

Oppgave 2

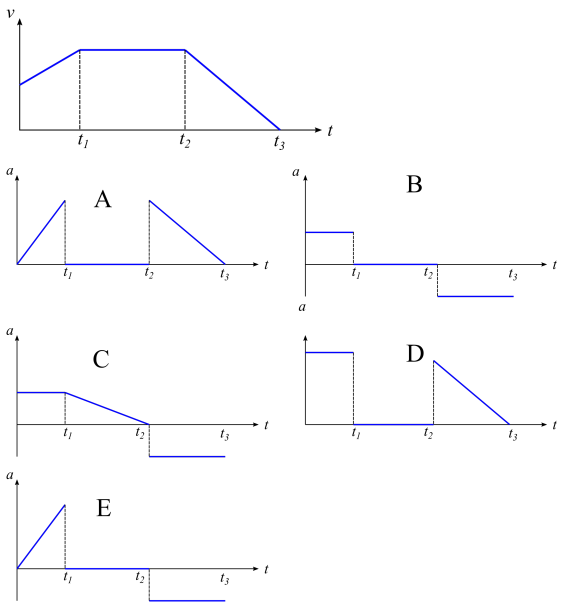
Ettersom $a = dv/dt$, vil akselerasjonsgrafen vise verdien av den deriverte (stigningstallet) til fartsgrafen. Dette er en randomisert oppgave:

Variant 1



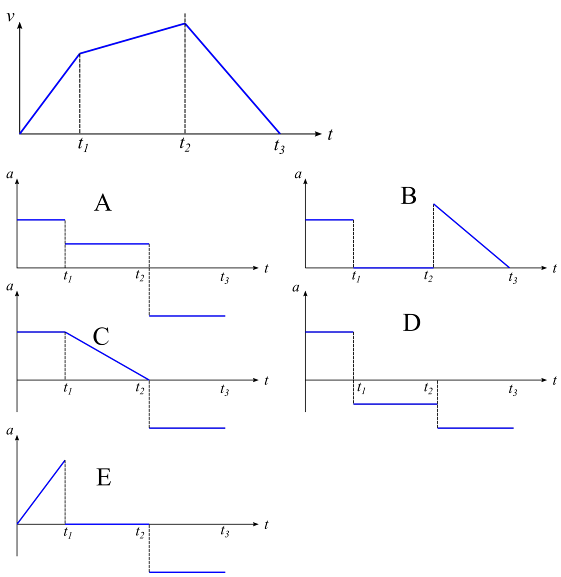
Riktig alternativ: D (jevnt økende fart - konstant fart - jevnt avtakende fart).

Variant 2



Riktig alternativ: B (jevnt økende fart - konstant fart - jevnt avtakende fart).

Variant 3



Riktig alternativ: A (jevnt økende fart - jevnt økende fart - jevnt avtakende fart).

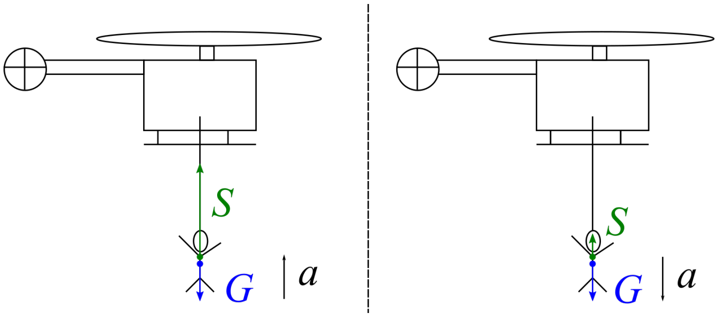
Oppgave 3

Ut i fra uavhengighetsprinsippet, dvs. at bevegelsene i horisontal- og vertikalretningen skjer uavhengig av hverandre, vil de to kulene bruke like lang tid på å falle samme vertikale strekning.

Riktig svar: **Kulene vil treffe underlaget samtidig**.

Oppgave 4

Figuren under viser kreftene som virker på personen (tyngden G og draget S fra kabelen) i to situasjoner: personen akselereres oppover (venstre) og nedover (høyre).



a) Newtons 2. lov på personen ved akselerasjon oppover (som settes som positiv retning):

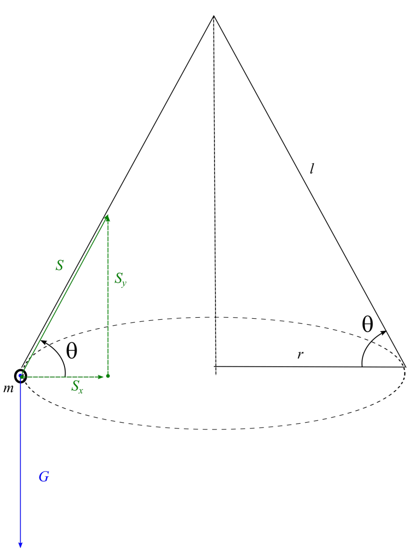
$$\begin{aligned}\sum F &= ma\\ S - mg &= ma\\ S &= m(a+g)\\ &= 60\,\text{kg}\left(5,0\,\text{m/s}^2 + 9,81\,\text{m/s}^2\right)\\ &= \underline{\underline{8,9\cdot 10^2\,\text{N}}}\end{aligned}$$

b) Newtons 2. lov på personen ved akselerasjon nedover (setter positiv retning nedover):

$$\begin{aligned}\sum F &= ma\\ mg - S &= ma\\ S &= m(g-a)\\ &= 60\,\text{kg}\left(9,81\,\text{m/s}^2 - 5,0\,\text{m/s}^2\right)\\ &= \underline{\underline{2,9\cdot 10^2\,\text{N}}}\end{aligned}$$

Oppgave 5

a) Figuren under viser kreftene som virker på steinen når den svinges rundt i en horisontal sirkel i en snor med lengde l som danner en vinkel θ med horisontalplanet:



Ettersom steinen ikke beveger seg i y-retningen, er

$$S_y = mg,$$

Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen gir:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ S_x &= m \cdot \frac{v^2}{r} \end{aligned} \qquad \text{(Formel for sentripetalaks.)}$$

Fra trignometri er dessuten

$$S_y = S_x \tan\theta = mg \tan\theta \Rightarrow S_x = \frac{mg}{\tan\theta},$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{mg}{\tan\theta} &= m \cdot \frac{v^2}{r} \\ v &= \sqrt{\frac{gr}{\tan\theta}} \end{aligned}$$

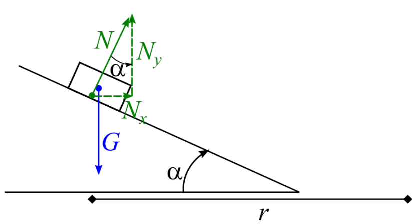
Fra figurer er radiusen r i sirkelen gitt ved

$$r = l\cos\theta,$$

som gir

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{gr}{\tan\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{gl\cos\theta}{\tan\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1,3\,\mathrm{m} \cdot \cos 30^\circ}{\tan 30^\circ}} \\ &= 4,37\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{4,4\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

b) Figuren viser kreftene som virker på bilen: normalkraften N og tyngden G (det er ingen friksjon):



Newtons 1. lov i y-retningen gir

$$N_y = mg$$

Det er x-komponenten av normalkrafta som har retning inn mot sentrum av sirkelen, og som gir bilen en sentripetalakselerasjon:

$$N_x = \frac{mv^2}{r}$$

Videre er

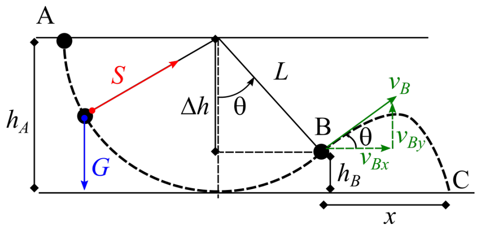
$$N_x = N_y \tan\alpha = mg\tan\alpha,$$

slik at

$$mg\tan\alpha = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \underline{\underline{\sqrt{gr\tan\alpha}}}$$

Oppgave 6

a) Figuren under viser bevegelsen til legemet fra snora slippes i A til snora ryker i punkt B.



Ettersom snordraget S hele tiden står vinkelrett på farten til legemet, gjør ikke S noe arbeid - dvs. kun tyngden virker, og mekanisk energi er bevart. Det gir følgende energiregnskap fra A til B når kula slippes fra ro i A, og nullnivå for potensiell energi velges på bakkenivå (punkt C):

$$\begin{aligned} mgh_A &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \\ gh_A &= \frac{1}{2}v_B^2 + gh_B \\ v_B &= \sqrt{2g\left(h_A - h_B\right)} \end{aligned}$$

Ut i fra figuren er høydeforskjellen mellom A og B lik

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_A - h_B \\ &= \underline{L\cos\theta} \end{aligned}$$

Det gir at

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{2g\Delta h} \\ &= \sqrt{2gL\cos\theta} \\ &= \sqrt{2\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3,5\,\mathrm{m}\cdot\cos 50^\circ} \\ &= 6,63\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{6,6\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

b) Skal finne den horisontale avstanden mellom B og C, dvs. lengden x på figuren. Etter at snora er røket, vil legemet følge en vanlig kasteparabel, der bevegelseslikningene for horisontal- og vertikalretningen er gitt ved (pos. retning hhv. mot høyre og oppover)

$$x = v_{0x}t,\; y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

der startfartskomponentene er

$$v_{0x} = v_{Bx} = v_B\cos\theta,\; v_{0y} = v_{By} = v_B\sin\theta.$$

Finner falltiden t (ettersom pos. retning er oppover, er $y = -1,3\,\mathrm{m}$ i punkt C):

$$\begin{aligned} y &= v_B\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \\ -1,3 &= 6,63\sin 50^\circ - \frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot t^2 && \text{(Setter inn tall uten enheter)} \end{aligned}$$

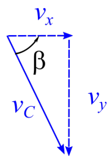
Får at

$$t = 1,25\,\mathrm{s},$$

som gir at

$$\begin{aligned} x &= v_B \cos\theta \cdot t \\ &= 6,63\,\mathrm{m/s} \cdot \cos 50^\circ \cdot 1,25\,\mathrm{s} \\ &= 5,33\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{5,3\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

c) Vi kan bestemme komponentene til fartsvektoren $\vec{v}_C = [v_x, v_y]$ i punkt C ut fra bevegelseslikningene for farten. x-komponenten til farten er konstant (lik verdien i B), mens farten i y-retning er gitt fra likninga med konstant akselerasjon. Fartsvektoren ved nedslaget er illustrert på figuren under:



$$v_x = v_{Bx} = v_B \cos\theta,\ v_y = v_{By} - gt = v_B \sin\theta - gt$$

Verdien til farten er gitt ved

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(v_B \cos\theta)^2 + (v_B \sin\theta - gt)^2} \\ &= \sqrt{(6,63\,\mathrm{m/s} \cos 50^\circ)^2 + (6,63\,\mathrm{m/s} \sin 50^\circ - 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1,25\,\mathrm{s})^2} \\ &= 8,35\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{8,4\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

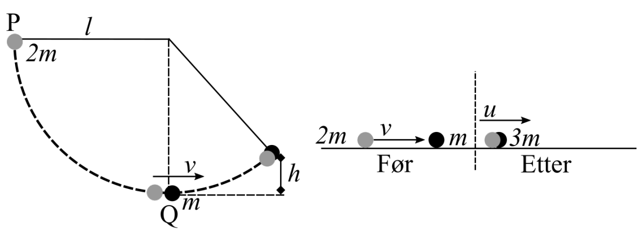
Vinkelen β mellom fartsvektoren og horisontalretningen:

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \left|\frac{v_y}{v_x}\right| \\ &= \left|\frac{6,63\,\mathrm{m/s} \sin 50^\circ - 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1,25\,\mathrm{s}}{6,63\,\mathrm{m/s} \cos 50^\circ}\right| \\ &= 1,69 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \tan^{-1} 1,69 = 59,4^\circ \\ \beta &\approx \underline{\underline{59^\circ}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

Kule P har masse $2m$ og slippes fra horisontal stilling til den treffer kule Q med masse m. De støter sammen i et fullstendig uelastisk støt og blir hengende sammen som et felleslegeme med masse $3m$ etter støtet. De når en maksimal høyde h over kollisjonspunktet som skal bestemmes. Situasjonen er illustrert på figuren under:



Kule P sin mekaniske energi er konstant i løpet av halvsirkelen før den treffer Q med (den horisontale) farten v:

$$2mgl = \frac{1}{2} \cdot 2mv^2 \Rightarrow v = \underline{\sqrt{2gl}}$$

Bevaring av bevegelsesmengde i støtøyeblikket:

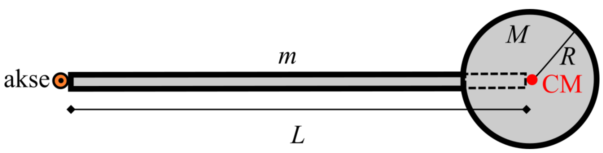
$$\begin{aligned}
\sum_{\text{før}} p &= \sum_{\text{etter}} p \\
2m \cdot v + 0 &= 3m \cdot u \\
u &= \underline{\frac{2}{3} v}
\end{aligned}$$

Mekanisk energi for felleslegemet er igjen bevart idet det svinger opp til en maksimal høyde h (velger nullnivå for pot. energi i kollisjonspunktet:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot 3m \cdot u^2 &= 3m \cdot gh \\
h &= \frac{1}{2} \frac{u^2}{g} \\
&= \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{2}{3} v \right)^2 \\
&= \frac{1}{2g} \cdot \frac{4}{9} \cdot v^2 \\
&= \frac{1}{2g} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2gl \\
&= \underline{\underline{\frac{4}{9} l}}
\end{aligned}$$

Oppgave 8

Figuren under viser et stivt legeme bestående av en stiv stang med lengde L og masse m, og en kule med masse M og radius R med sentrum i den ene enden av stanga. Vi skal bestemme treghetsmomentet om en akse gjennom den andre enden av stanga, slik figuren under viser:



Det totale treghetsmomentet til stanga er

$$I = I_{\text{stang}} + I_{\text{kule}},$$

der $I_{\text{stang}} = \frac{1}{3} mL^2$ og I_{kule} finnes fra Steiners sats:

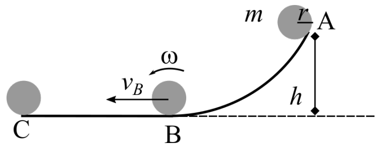
$$\begin{aligned}
I_{\text{kule}} &= I_{CM} + ML^2 \\
&= \underline{\frac{2}{5} MR^2 + ML^2}
\end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned}
I &= I_{\text{stang}} + I_{\text{kule}} \\
&= \frac{1}{3} mL^2 + \frac{2}{5} MR^2 + ML^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2,30\,\text{kg} \cdot (0,800\,\text{m})^2 + \frac{2}{5} \cdot 1,5\,\text{kg} \cdot (0,100\,\text{m})^2 + 1,5\,\text{kg} \cdot (0,800\,\text{m})^2 \\
&= 1,457\,\text{kgm}^2 \\
&\approx \underline{\underline{1,46\,\text{kgm}^2}}
\end{aligned}$$

Oppgave 9

a) Figuren under viser kula som ruller uten å bli fra A til B og videre langs et horisontalt underlag til C:



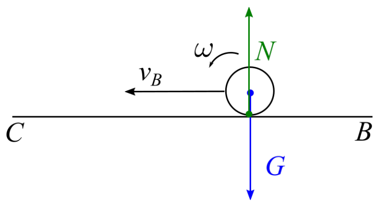
Ettersom kula ruller uten å gli fra A til B, er mekanisk energi besvart, og vi har rullebetingelsen $v = \omega r$. Med nullnivå i punkt B blir energiregnskapet (potensiell energi går over til kinetisk energi i form av translasjon og rotasjon):

$$
\begin{aligned}
mgh &= \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
mgh &= \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v_B}{r}\right)^2 \\
gh &= \frac{1}{2}v_B^2 + \frac{1}{5}v_B^2 \\
\frac{7}{10}v_B^2 &= gh \\
v_B &= \sqrt{\frac{10}{7}gh} \\
&= \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 2{,}5\,\mathrm{m}} \\
&= 5{,}92\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{5{,}9\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}
$$

b) Kulas vinkelhastighet i punkt B er ut fra rullebetingelsen gitt ved

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{v_B}{r} \\
&= \frac{5{,}92\,\mathrm{m/s}}{0{,}20\,\mathrm{m}} \\
&= 29{,}6\,\mathrm{rad/s} \\
&\approx \underline{\underline{30\,\mathrm{rad/s}}}
\end{aligned}
$$

c) Figuren under viser kreftene som virker på kula når den ruller på det horisontale, friksjonsfrie underlaget fra B til C:



De to kreftene som virker, tyngden G og normalkrafta N, har begge angrepslinjer gjennom kulas sentrum, og gir derfor null dreiemoment om massesenteret. Ved Newtons 2. lov for rotasjon, $\sum\tau = I\alpha = 0$, vil altså vinkelakselerasjonen $\alpha = 0$ og kula ruller med konstant vinkelfart.

d) Ettersom kula ruller med konstant vinkelfart (og fart v_B) på det horisontale underlaget mellom B og C, har vi følgende sammenheng mellom rotert vinkel θ og vinkelfarten:

$$\begin{aligned}\theta &= \omega t \\ &= \omega \cdot \frac{s}{v_B} && \text{(Ved konstant fart er } t = s/v_B\text{)} \\ &= 29,6\,\mathrm{rad/s} \cdot \frac{2,52\,\mathrm{m}}{5,92\,\mathrm{m/s}} \\ &= \underline{12,6\,\mathrm{rad}}\end{aligned}$$

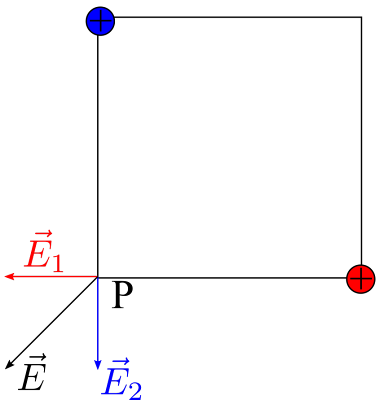
Ettersom én hel omdreining tilsvarer en rotert vinkel lik 2π rad, blir antall hele omdreininger fra B til C da lik

$$\frac{12,6\,\mathrm{rad}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = \underline{\underline{2,0}}$$

Elektromagnetisme

Oppgave 10

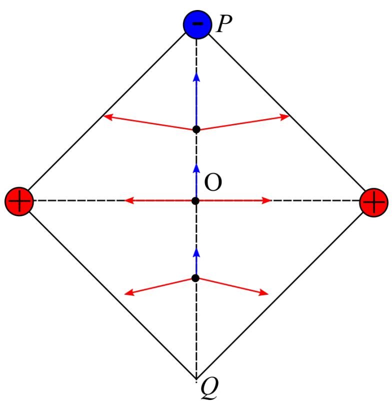
a) Figuren under viser feltbidragene fra de to positive ladningene i de to hjørnene i kvadratet:



Det totale elektriske feltet $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ i punkt P har da retning som antydet på figuren.

Riktig alternativ: Feltet i P har retning nedover mot venstre.

b) Figuren under viser feltbidragene fra de to positive ladningene (røde piler) og den ene negative (blå pil) i tre ulike punkter langs linja mellom P og Q: sentrum O, samt to punkter hhv. over og under O.



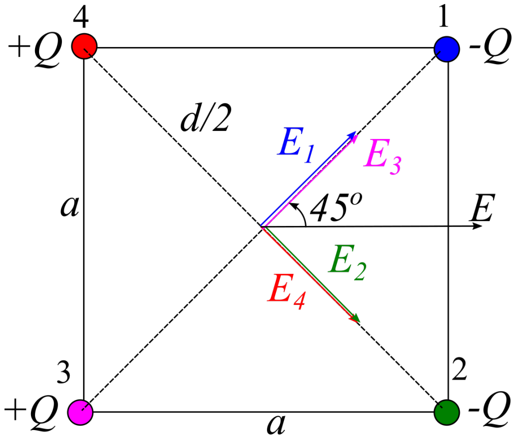
x-komponentene av bidragene fra de to positive ladningene vil alltid oppheve hverandre, mens y-komponentene adderes. Som figuren viser, er det i et punkt mellom P og Q der det totale feltet blir 0: her finnes et punkt der summen av y-komponentene fra de positive ladningene (retning nedover) er like stor som bidraget fra den negative ladningen (retning oppover).

Alternativt resonnement: Pga. symmetri vil totalt felt langs linja PQ hele tiden har retning oppover eller nedover. I sentrum O har det totale feltet retning **oppover**. I Q er feltbidraget fra de to positive ladningene større enn fra den negative ladningen i P (p.g.a. kortere avstand), slik at totalt felt har retning **nedover**. *Da må det finnes et punkt mellom O og Q der feltet er null.*

Riktig alternativ: Det elektriske feltet er null i et punkt på linjen mellom O og Q.

Oppgave 11

a) Bidragene til det elektriske feltet i sentrum av kvadratet fra de ulike ladningene er inntegnet på figuren under:



Som figuren viser, vil alle y-komponenten oppheve hverandre, mens x-komponentene går alle mot høyre og skal adderes. Det totale feltet i sentrum får derfor absoluttverdi (feltbidraget fra én partikkel er gitt fra Coulombs lov):

$$\begin{aligned} E &= 4E_1 \cos 45^\circ \\ &= 4 \cdot \frac{kQ}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{kQ}{\frac{1}{2}a^2} && \left(\text{Pytagoras: } d^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{d}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{4\sqrt{2}\frac{kQ}{a^2}}} \end{aligned}$$

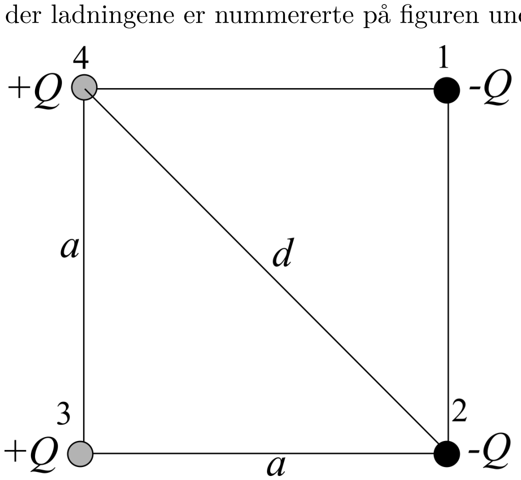
b) Det elektriske potensialet i sentrum er summen av bidragene fra hver ladning. Ettersom det er to positive og to negative ladninger i lik avstand fra sentrum, blir det totale potensialet i sentrum lik 0:

$$V = \underline{\underline{0}}$$

c) Den potensielle energien til ladningskonfigurasjonen er

$$U = \sum_{i<j} \frac{kQ_iQ_j}{r_{ij}},$$

der ladningene er nummererte på figuren under.



Ladningene vekselvirker parvis, og vi passer på å ta med hvert bidrag kun én gang (like ladninger gir positivt bidrag; ulike gir negativt):

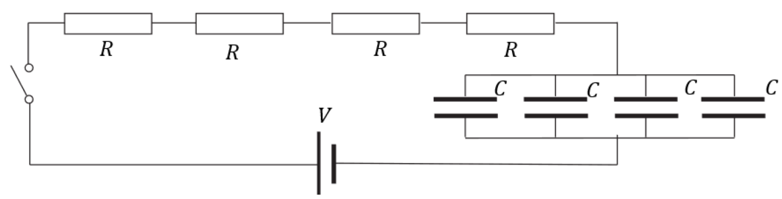
$$
\begin{aligned}
U &= \underbrace{k\frac{Q\,(-Q)}{a} + k\frac{(-Q)^2}{a} + \frac{kQ\,(-Q)}{d}}_{\text{vekselvirkning med ladning 1}} + \underbrace{k\frac{Q\,(-Q)}{a} + k\frac{Q\,(-Q)}{d}}_{\text{vekselvirkning med ladning 2}} + \underbrace{k\frac{Q^2}{a}}_{\text{ladning 3+4}} \\
&= -2k\frac{Q^2}{d} \\
&= -2k\frac{Q^2}{a\sqrt{2}} \\
&= \underline{\underline{-\frac{2}{\sqrt{2}}k\frac{Q^2}{a}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 12

Tidskonstanten for en krets med total resistans R_{tot} og kapasitans C_{tot} er gitt ved

$$\tau = R_{tot}C_{tot}.$$

Gitt kretsen under:



Her er 4 seriekoblede, identiske motstander med resistans R, slik at $R_{tot} = 4R$. De 4 identiske parallellkoblede kondensatorene med kapasitans C har $C_{tot} = 4C$, slik at

$$
\begin{aligned}
\tau &= 4R \cdot 4C \\
&= \underline{\underline{16RC}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 13

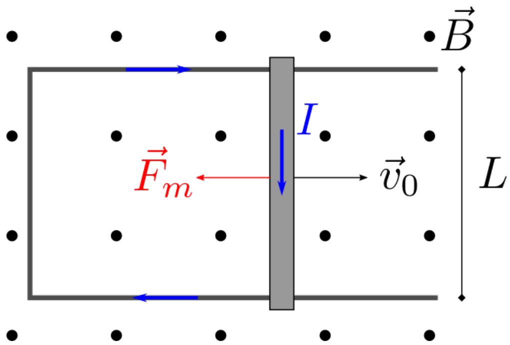
a) Indusert ems når stanga med lengde L beveger seg med farten v_0 normalt på et magnetfeltet B er

$$\varepsilon = v_0 BL,$$

slik at strømmen i kretsen blir

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\varepsilon}{R} \\
&= \frac{v_0 BL}{R} \\
&= \frac{1,2\,\mathrm{m/s} \cdot 0,35\,\mathrm{T} \cdot 0,40\,\mathrm{m}}{0,20\,\Omega} \\
&= \underline{\underline{0,84\,\mathrm{A}}}
\end{aligned}
$$

Ettersom arealet av sløyfa **øker** etterhvert som stanga glir mot høyre, og dermed fluksen, tilsier Lenz’ regel at den induserte strømmen forsøker å svekke det ytre magnetfeltet. Se figuren under.



Strømretningen blir derfor **med klokka**.

b) Magnetkrafta på stanga er gitt ved

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B},$$

med absoluttverdi

$$\begin{aligned} F_m &= ILB \\ &= 0,84\,\mathrm{A} \cdot 0,40\,\mathrm{m} \cdot 0,35\,\mathrm{T} \\ &= 0,118\,\mathrm{N} \\ &\approx \underline{\underline{0,12\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Med strømretningen bestemt i a) og retningen for det ytre magnetfeltet, gir høyrehåndsregelen at magnetkrafta på stanga retning mot **venstre**.

c) Når det ikke er friksjon, er magnetkrafta den eneste krafta som virker på stanga. Newtons 2. lov gir derfor (med positiv retning mot høyre):

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ -ILB &= m\frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

Den induserte strømmen I avhenger av farten v til stanga, jf. oppgave a):

$$I = \frac{vBL}{R},$$

slik at vi får følgende differensiallikning for stangas fart som funksjon av tid:

$$\begin{aligned} -\frac{vBL}{R} \cdot LB &= m\frac{dv}{dt} \\ m\frac{dv}{dt} &= -\frac{B^2L^2}{R} \cdot v. \end{aligned}$$

d) Gitt løsningen av differensiallikninga

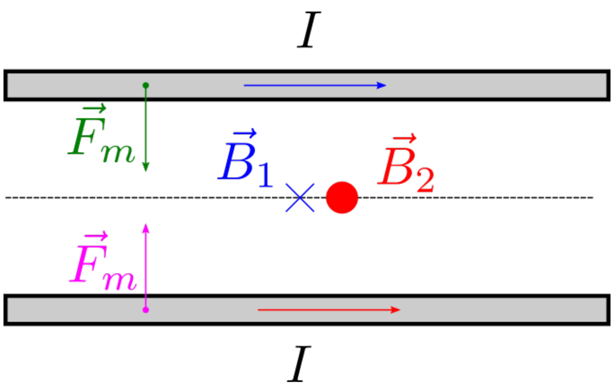
$$v(t) = 1,2\,\mathrm{m/s} \cdot e^{-0,98\,\mathrm{s}^{-1}t},$$

er tilbakelagt strekning s fra $t = 0$ der stanga hadde fart v_0 til stanga stopper helt, gitt ved

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^\infty v(t)dt \\
&= \int_0^\infty 1,2\,\mathrm{m/s} \cdot e^{-0,98\,\mathrm{s}^{-1}t} dt \\
&= 1,2\,\mathrm{m/s} \left[\frac{1}{-0,98\,\mathrm{s}^{-1}} e^{-0,98\,\mathrm{s}^{-1}t} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{1,2}{0,98}\,\mathrm{m}\left(0 - e^0\right) \\
&= 1,22\,\mathrm{m} \\
&\approx \underline{\underline{1,2\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 14

Magnetfeltet fra en lang, rett leder er konsentriske sirkler med retning gitt ved høyrehåndsregelen. Figuren under viser magnetfeltbidragene fra de to lederne i området midt mellom lederne, samt magnetkraften på hver leder på grunn av magnetfeltet fra den andre:



Feltbidragene har altså motsatt retning og er like store, dvs. magnetfeltet mellom lederne er null. Magnetkreftene gjør at lederne tiltrekker hverandre.

Riktig alternativ: Magnetfeltet fra lederne vil være null midt mellom lederne, og lederne vil tiltrekke hverandre.

Oppgave 15

Magnetfeltet i avstand R fra en lang, rett leder som fører strømmen I har verdien

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \\
&= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 0,050\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 0,050\,\mathrm{m}} \\
&= \underline{\underline{2,0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}}}
\end{aligned}$$