Løsningsforslag eksamen TALM1009

Vår 2020

Oppgave 1

a)

i) Hva er elektronkonfigurasjonen til K^+?

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

$1s^2 2s^2 2p^6$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$

ii) Hva er elektronkonfigurasjonen til Mg^{2+}?

$1s^2 2s^2 2p^6$

$1s^2 2s^2 2p^4$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$

iii) Hva er elektronkonfigurasjonen til S^{2-}?

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$

iv) Hva er oksidasjonstallet til N i NO_3^-?

+V

+III

+IV

+VI

v) Hva er oksidasjonstallet til N i NH_2OH?

-I

+I

-II

-III

b)

i) Hva er det systematiske navnet til forbindelsen $MgCl_2$?

Magnesiumklorid

Magnesium(II)klorid

Magnesium(I)klorid

Magnesiumdiklorid

ii) Hva er det systematiske navnet til forbindelsen KNO_3?

Kaliumnitrat

Kalium(I)nitrat

Kaliummononitrat

Kaliumnitrid

iii) Hva er det systematiske navnet til forbindelsen CuF?

Kobber(I)fluorid

Kobber(II)fluorid

Kobberfluorid

Kobbermonofluorid

iv) Hva er det systematiske navnet til forbindelsen CBr_4?

Karbontetrabromid

Monokarbontetrabromid

Karbon(IV)bromid

Karbonbromid

v) Hva er det systematiske navnet til forbindelsen S_5N_6?

Pentasvovelheksanitrid

Heksasvovelpentanitrid

Svovelheksanitrid

Svovelnitrid

vi) Hva er den kjemiske formelen til kalsiumhydroksid?

$Ca(OH)_2$

$CaOH$

Ca_2OH

KOH

vii) Hva er den kjemiske formelen til kobolt(II)klorid?

$CoCl_2$

$CoCl$

Co_2Cl

$CuCl_2$

viii) Hva er den kjemiske formelen til bly(IV)klorid?

$PbCl_4$

$PbCl_2$

Pb_3Cl_4

$PbCl$

ix) Hva er den kjemiske formelen til difosfortrioksid?

P_2O_3

P_3O_2

PO_3

P_2O

x) Hva er den kjemiske formelen til dinitrogenmonoksid?

N_2O

NO_2

NO

N_2O_4

Oppgave 2

a)

Jern løses opp i hydrogenbromid etter følgende ubalanserte reaksjonsligning:

$$\mathrm{Fe(s)} + \mathrm{HBr(aq)} \rightarrow \mathrm{FeBr_2(aq)} + \mathrm{H_2(g)}$$

i) Hvor mange gram HBr trengs for å løse opp 3,2 g Fe?

ii) Hvor mange gram H_2 kan bli dannet når 3,2 g Fe løses opp i HBr?

iii) Anta at hydrogengassen som dannes, når 3,2 g Fe løses opp i HBr, plasseres i en tom, lukket beholder med volum på 0,85 L ved 25°C. Beregn trykket i beholderen. Anta at trykket i den tomme beholderen var 0 før tilsetting av hydrogengassen.

i)

Balansert reaksjonsligning:

$$\mathrm{Fe(s)} + \mathrm{2HBr(aq)} \rightarrow \mathrm{FeBr_2(aq)} + \mathrm{H_2(g)}$$

$m_{Fe} = 3{,}2\ g$

$$n_{Fe} = \frac{m_{Fe}}{M_{Fe}} = \frac{3{,}2\ g}{55{,}85\ g/mol} = 0{,}0573\ mol$$

$$\frac{n_{HBr}}{n_{Fe}} = \frac{2}{1}$$

$n_{HBr} = 2n_{Fe} = 2 \times 0{,}0573\ mol = 0{,}115\ mol$

$m_{HBr} = M_{HBr} \times n_{HBr} = 80{,}908\ g/mol \times 0{,}115\ mol = \mathbf{9{,}3\ g}$

ii)

$$\frac{n_{H_2}}{n_{Fe}} = \frac{1}{1}$$

$n_{H_2} = n_{Fe} = 0{,}0573\ mol = 0{,}0573\ mol$

$m_{H_2} = M_{H_2} \times n_{H_2} = 2{,}016\ g/mol \times 0{,}0573\ mol = \mathbf{0{,}12\ g}$

iii)

Antar at alt av 3,2 g Fe dannes til produkter.

$n_{H_2} = 0{,}0573\ mol$

$V = 0{,}85\ L$

$T = 25^{o}C$

$pV = nRT$

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{0{,}0573\ mol \times 0{,}082057\ (L \times atm)/(K \times mol) \times (25 + 273)\ K}{0{,}85\ L} = \mathbf{1{,}6\ atm}$$

b)

25,6 mL av en 1,20 M KCl-løsning reagerer med 14,6 mL av en 0,900 M $Pb(NO_3)_2$-løsning etter følgende reaksjonsligning:

$$2KCl(aq) + Pb(NO_3)_2(aq) \rightarrow PbCl_2(s) + 2KNO_3(aq)$$

Det dannes 3,18 g $PbCl_2$. Hva er prosentvis utbytte av $PbCl_2$?

$n_{KCl} = 1{,}20\ mol/L \times 0{,}0256\ L = 0{,}03072\ mol$

$n_{Pb(NO_3)_2} = 0{,}900\ mol/L \times 0{,}0146\ L = 0{,}01314\ mol$

Hvis alt KCl reagerer:

$$\frac{n_{Pb(NO_3)_2}}{n_{KCl}} = \frac{1}{2}$$

$$n_{Pb(NO_3)_2} = \frac{1}{2} n_{KCl} = \frac{1}{2} \times 0{,}03072\ \mathrm{mol} = \ 0{,}01536\ \mathrm{mol}$$

Hvis alt KCl reagerer trengs 0,01536 mol $Pb(NO_3)_2$

Hvis alt $Pb(NO_3)_2$ reagerer:

$$\frac{n_{KCl}}{n_{Pb(NO_3)_2}} = \frac{2}{1}$$

$$n_{KCl} = 2n_{Pb(NO_3)_2} = 2 \times 0{,}01314\ \mathrm{mol} = \ 0{,}02628\ \mathrm{mol}$$

Hvis alt $Pb(NO_3)_2$ reagerer trengs 0,02628 mol KCl.

$Pb(NO_3)_2$ begrensende reaktant.

$$\frac{n_{PbCl_2}}{n_{Pb(NO_3)_2}} = \frac{1}{1}$$

$$n_{PbCl_2} = n_{Pb(NO_3)_2} = 0{,}01314\ \mathrm{mol}$$

$$m_{PbCl_2} = M_{PbCl_2} \times n_{PbCl_2} = 278{,}1\ \mathrm{g/mol}\ \times 0{,}01314\ \mathrm{mol} = 3{,}654\ \mathrm{g}$$

Prosentvis utbytte: $\frac{3{,}18}{3{,}654} \times 100\ \% = \mathbf{87{,}0}\ \%$

c)

i) Hvor mange gram $CaCl_2$ trengs for å lage 7,5 L av en 0,330 mol/L $CaCl_2$-løsning?

2,7x10^2 g

1,4x10^2 g

5,5x10^2 g

2,5x10^3 g

$$n_{CaCl_2} = c \times V = 0{,}330\ \mathrm{mol/L}\ \times 7{,}5\mathrm{L} = 2{,}475\ \mathrm{mol}$$

$$m_{CaCl_2} = M_{CaCl_2} \times n_{CaCl_2} = 110{,}98\ \mathrm{g/mol}\ \times 2{,}475\ \mathrm{mol} = \ \mathbf{2{,}7 \times 10^2\ g}$$

ii) 250 mL av en 2,0 M HCl-løsning fortynnes til et nytt volum på 1,00 L. Hva blir den nye konsentrasjonen av HCl?

0,50 mol/L

0,25 mol/L

2,0 mol/L

4,0 mol/L

$$V_1 = 250 \text{ mL} = 0{,}250 \text{ L}$$

$$c_1 = 2{,}0 \text{ mol/L}$$

$$V_2 = 1{,}0 \text{ L}$$

$$n_{HCl} = c_1 \times V_1 = 2{,}0 \text{ mol/L} \times 0{,}250\text{L} = 0{,}50 \text{ mol}$$

$$c_2 = \frac{n_{HCl}}{V_2} = \frac{0{,}50 \text{ mol}}{1{,}0 \text{ L}} = \mathbf{0{,}50\ mol/L}$$

Oppgave 3

a) Ta utgangspunkt i følgende likevekt:

$$H_2(g) + F_2(g) \leftrightarrow 2HF(g)$$

Ved en gitt temperatur har denne reaksjonen en likevektskonstant, K_c, på $1{,}15 \times 10^2$.

Til en tom beholder på 1,5 L tilføres 3,00 mol av hver komponent (H_2, F_2 og HF) ved den aktuelle temperaturen.

i) I hvilken retning vil reaksjonen gå for å innstille likevekt? Vis dette med beregninger.

ii) Beregn likevektskonsentrasjonen av H_2, F_2 og HF.

i)

$$[H_2] = \frac{n_{H_2}}{V} = \frac{3{,}00 \text{ mol}}{1{,}5 \text{ L}} = 2{,}00 \text{ mol/L}$$

$$[H_2] = [F_2] = [HF] = 2{,}00 \text{ mol/L}$$

$$Q = \frac{[HF]^2}{[H_2][F_2]} = \frac{2{,}00^2}{2{,}00 \times 2{,}00} = 1$$

$$Q < K_c$$

reaksjonen går mot høyre

ii)

Likevektstabell:

	$H_2(g) + F_2(g)$	$\leftrightarrow$	$2HF(g)$
Ved start	2,00	2,00	2,00
Endring	-x	-x	2x
Ved likevekt	2,00 - x	2,00 - x	2,00 + 2x

$$Q = \frac{[HF]^2}{[H_2][F_2]} = \frac{(2{,}00 + 2x)^2}{(2{,}00 - x)(2{,}00 - x)} = 1{,}15 \times 10^2$$

$$\frac{4{,}00 + 8{,}00x + 4x^2}{4{,}00 - 4{,}00x + x^2} = 1{,}15 \times 10^2$$

$$111x^2 - 468x + 456 = 0$$

$$x_1 = 2{,}69$$

$$x_2 = 1{,}53$$

x_1 gir negativ konsentrasjon for H_2 og F_2.

Likevektskonsentrasjon:

$$[H_2] = 2{,}00 - x = 2{,}00 - 1{,}53 = \mathbf{0{,}47\ mol/L}$$

$$[F_2] = 2{,}00 - x = 2{,}00 - 1{,}53 = \mathbf{0{,}47\ mol/L}$$

$$[HF] = 2{,}00 + 2x = 2{,}00 + 2 \times 1{,}53 = \mathbf{5{,}06\ mol/L}$$

b)

i) Beregn pH i en 8,7x10^{-5} M NaOH-løsning ved 25^{o}C.

9,94

3,74

4,06

8,63

10,24

NaOH er en sterk base: $NaOH(aq) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq)$

$$[OH^-] = [NaOH] = 8{,}7 \times 10^{-5}\ mol/L$$

$$[\mathrm{H^+}][\mathrm{OH^-}] = 10^{-14}$$

$$[\mathrm{H^+}] = \frac{10^{-14}}{[\mathrm{OH^-}]} = \frac{10^{-14}}{8{,}7 \times 10^{-5}} = 1{,}15 \times 10^{-10}\ \mathrm{mol/L}$$

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log(1{,}15 \times 10^{-10}) = \mathbf{9{,}94}$$

ii)

Hva er konsentrasjonen av OH^--ioner i en løsning med pH = 10,43 ved 25°C?

2,7x10^{-4} M

3,7x10^{-11} M

3,7x10^{-25} M

10,4 M

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}]$$

$$[\mathrm{H^+}] = 10^{-\mathrm{pH}} = 10^{-10{,}43} = 3{,}71 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L}$$

$$[\mathrm{OH^-}] = \frac{10^{-14}}{[\mathrm{H^+}]} = \frac{10^{-14}}{3{,}7 \times 10^{-11}} = \mathbf{2{,}7 \times 10^{-4}\ mol/L}$$

iii) Gitt følgende syrekonstanter, K_a. Hvilken korresponderende base har høyest verdi for K_b?

CN^-

ClO^-

CHO_2^-

NO_2^-

Jo mindre en syre protolyserer, jo høyere er K_b til den korresponderende basen. Dermed vil den korresponderende basen til den syren som protolyserer minst ha høyest K_b. Derfor vil den korresponderende basen til den syren med lavest K_a, ha høyest K_b. Det blir CN^-.

iv) pH i en 0,100 M HCOOH-løsning er 2,38. Hva er K_a til syren?

$1,8x10^{-4}$

$4,1x10^{-2}$

$1,7x10^{-5}$

$2,4x10^{-12}$

$$\mathrm{HCOOH(aq)} \leftrightarrow \mathrm{HCOO^-\ (aq) + H^+(aq)}$$

$$\mathrm{K_a} = \frac{[\mathrm{HCOO^-}][\mathrm{H^+}]}{[\mathrm{HCOOH}]}$$

Likevektstabell:

	$\mathrm{HCOOH(aq)}$ $\leftrightarrow$	$\mathrm{HCOO^-(aq)}$ +	$\mathrm{H^+(aq)}$
Ved start	0,100	0	0
Endring	-x	x	x
Ved likevekt	0,100 - x	x	x

$$[\mathrm{H^+}] = 10^{-\mathrm{pH}} = 10^{-2{,}38} = 0{,}004169\ \mathrm{mol/L}$$

$$\mathrm{K_a} = \frac{[\mathrm{HCOO^-}][\mathrm{H^+}]}{[\mathrm{HCOOH}]} = \frac{0{,}004169^2}{0{,}100 - 0{,}004169} = \mathbf{1{,}8 \times 10^{-4}}$$

v) Avgjør om løsningen blir sur, nøytral eller basisk når den ioniske forbindelsen HCOONa løses i vann.

Basisk

Nøytral

Sur

$$\mathrm{HCOONa(aq)} \rightarrow \mathrm{Na^+(aq) + HCOO^-(aq)}$$

Na^+ påvirker ikke pH.

$\mathrm{HCOO^-}$ er korresponderende base til HCOOH:

$$\mathrm{HCOO^-(aq) + H_2O(l)} \leftrightarrow \mathrm{HCOOH(aq) + OH^-(aq)}$$

Dette gir en basisk løsning.

d)

i) Beregn den molare løseligheten til $Fe(OH)_3$ i vann ved 25°C.

ii) Hvor mange milligram $Fe(OH)_3$ kan løses i 10 L vann ved 25°C?

i)

$$Fe(OH)_3(s) \leftrightarrow Fe^{3+}(aq) + 3OH^-(aq)$$

$$K_{sp} = [Fe^{3+}][OH^-]^3$$

Setter opp likevektstabell:

	$Fe(OH)_3(s)$ ↔	$Fe^{3+}(aq)$ +	$3OH^-(aq)$
Ved start	-	0	0
Endring	-	x	3x
Ved likevekt	-	x	3x

$$K_{sp} = [Fe^{3+}][OH^-]^3 = (x) \times (3x)^3 = 8{,}0 \times 10^{-40}$$

$$27x^4 = 8{,}0 \times 10^{-40}$$

$$x = \left(\frac{8{,}0 \times 10^{-40}}{27}\right)^{\frac{1}{4}} = 7{,}38 \times 10^{-11}$$

$$[Fe^{3+}] = x = 7{,}38 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L}$$

$$[OH^-] = 3x = 3 \times 7{,}38 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L} = 2{,}21 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L}$$

$$1\ \mathrm{mol}\ Fe^{3+} \leftrightarrow 1\ \mathrm{mol}\ Fe(OH)_3$$

Molar løselighet av $Fe(OH)_3$: $\mathbf{7,4 \times 10^{-11}\ mol/L}$

ii)

$$V = 10\ \mathrm{L}$$

$$n_{Fe(OH)_3} = 7{,}38 \times 10^{-11}\ \mathrm{mol/L} \times 10\ \mathrm{L} = 7{,}38 \times 10^{-10}\ \mathrm{mol}$$

$$m_{Fe(OH)_3} = M_{Fe(OH)_3} \times n_{Fe(OH)_3} = 106{,}874\ \mathrm{g/mol} \times 7{,}38 \times 10^{-10}\ \mathrm{mol} = 7{,}9 \times 10^{-8}\ \mathrm{g}$$

$$m_{Fe(OH)_3} = \mathbf{7,9 \times 10^{-5}\ mg}$$

Oppgave 4

a) Balanser følgende redoksreaksjon i surt miljø:

$Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) \rightarrow\ Fe^{3+}\ (aq) + Mn^{2+}(aq)$

Sett på oksidasjonstall, skriv opp halvreaksjoner og vis fremgangsmåte for balanseringen.

Alternativ 1:

1. Oksidasjontall

$$\overset{+II}{Fe^{2+}}(aq) + \overset{+VII\ -II}{MnO_4^-}(aq)\ \rightarrow\ \overset{+III}{Fe^{3+}}(aq) + \overset{+II}{Mn^{2+}}(aq)$$

Mn: +VII -> +II

Fe: +II -> +III

2. Halvreaksjoner

Reduksjon: $MnO_4^-(aq)\ +\ 5e^-\ \rightarrow Mn^{2+}(aq)$

Oksidasjon: $Fe^{3+}(aq) + e^-\ \leftarrow\ Fe^{2+}(aq)$

3. Elektronbalanse

Totalreaksjon:

$$5Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq)\ \rightarrow\ 5Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(g)$$

4. Ladningsbalanse

Venstre side: +9

Høyre side: +17

Tilsetter $8H^+$ på venstre side

$$5Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) \rightarrow\ 5Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(g)$$

5. Massebalanse

	Fe	Mn	O	H
Venstre side	5	1	4	8
Høyre side	5	1	0	0

Tilsetter $4H_2O$ på høyre side

Balansert reaksjonsligning:

$$\mathbf{5Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) \rightarrow\ 5Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(g) + 4H_2O(l)}$$

Alternativ 2:

1. Oksidasjontall

+II +VII -II +III +II

$$\mathrm{Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq)\ \rightarrow\ Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(aq)}$$

Mn: +VII -> +II

Fe: +II -> +III

2. Halvreaksjoner

Reduksjon: $\mathrm{MnO_4^-(aq)\ + 8H^+(aq) +\ 5e^-\ \rightarrow Mn^{2+}(aq) + 4}H_2O(l)$

Oksidasjon: $\mathrm{Fe^{3+}(aq) + e^-\ \leftarrow\ Fe^{2+}(aq)}$

3. Elektronbalanse

Totalreaksjon:

$$\mathrm{5Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) \rightarrow\ 5Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(g) + 4H_2O(l)}$$

4. Ladningsbalanse

Venstre side: +17

Høyre side: +17

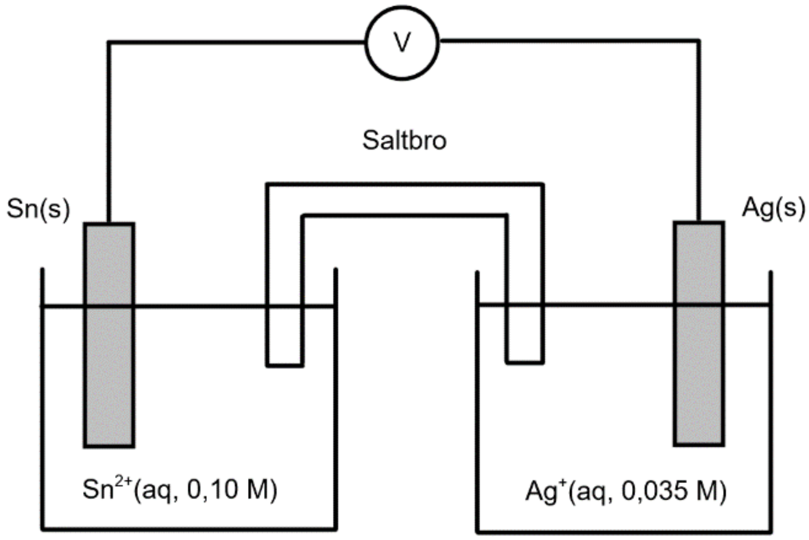
5. Massebalanse

	Fe	Mn	O	H
Venstre side	5	1	4	8
Høyre side	5	1	4	8

Balansert reaksjonsligning:

$$\mathbf{5Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) \rightarrow\ 5Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(g) + 4H_2O(l)}$$

b)



Figuren viser en galvanisk celle.

i) Sett opp halvreaksjoner og totalreaksjonen. Hva er anode og katode?

ii) Beregn standard cellepotensial (E^0) for cellen.

iii) Beregn cellepotensialet ved 25°C.

i)

Anode: Sn(s)

Katode: Ag(s)

Halvreaksjoner:

Katode: $\mathrm{Ag^+(aq) + e^- \;\rightarrow\; Ag(s)}$ $\quad E_k^0 = 0{,}80\ V$

Anode $\mathrm{Sn^{2+}(aq) + 2e^- \;\leftarrow\; Sn(s)}$ $\quad E_a^0 = -0{,}14\ V$

Totalreaksjon:

$$\mathrm{Sn(s) \; + \; 2Ag^+(aq) \rightarrow Sn^{2+}(aq) \; + \; 2Ag(s)}$$

ii)

$$\mathrm{E^0 \; = \; E_k^0 - \; E_a^0 \; = \; 0{,}80 - (-0{,}14)\ V = \; 0{,}94\ V}$$

$$\mathbf{E^0 \; = \; 0{,}94\ V}$$

iii)

$$E = E^0 - \frac{RT}{nF}\ln(Q) = E_k^0 - E_a^0 - \frac{RT}{nF}\ln\frac{[Sn^{2+}]}{[Ag^+]^2} = 0{,}94 - \frac{8{,}314 \times 298}{2 \times 96485}\ln\frac{0{,}100}{0{,}035^2}$$

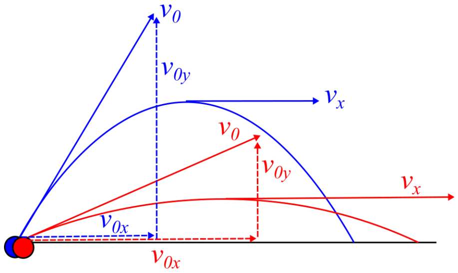
$$= 0{,}883 \text{ V}$$

$$\mathbf{E = 0,883\ V}$$

Flervalgsdel

Oppgave 5

a) I toppunktet er farten horisontal, dvs. $v_x = v_{0x}$ og $v_y = 0$. Da er det den kula med størst startfart v_{0x} i x-retning som har størst fart i toppunktet. Dette er illustrert på figuren under:



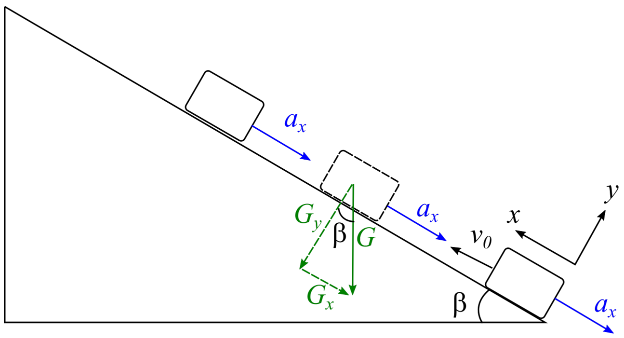
Man kan også argumentere ut i fra energi: begge kulene har samme kinetiske/potensielle energi ved startpunktet. Total mekanisk energi er konstant, og fordi den røde kula har lavest høyde/potensiell energi i toppunktet av de to, må den derfor ha størst fart.

Riktig svar: **den røde**.

b) En curlingstein som beveger seg friksjonsfritt langs et skråplan, påvirkes kun av tyngdekraften og normalkrafta fra underlaget. Komponenten av tyngden som virker langs skråplanet er konstant;

$$\begin{aligned} G_x &= mg \sin\beta \\ ma_x &= mg \sin\beta \qquad \text{(Newtons 2. lov)} \\ a_x &= \underline{g \sin\beta} \end{aligned}$$

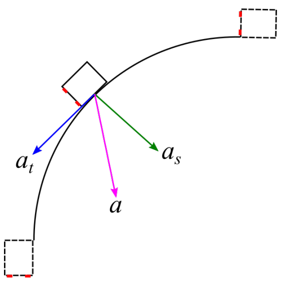
At akselerasjonen er konstant er illustrert på figuren under:



Dette betyr at steinen starter med en viss (positiv) startfart, og har konstant negativ akselerasjon langs skråplanet. Fartsgrafen blir altså en rett linje med negativt stigningstall lik akselerasjonen.

Riktig svar: **B**

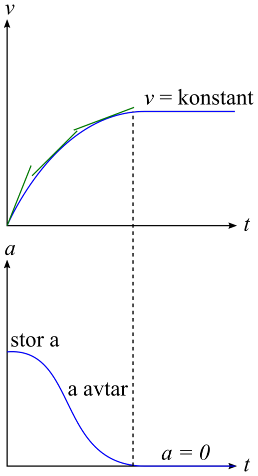
c) Figuren under viser komponentene til akselerasjonen $\vec{a}$ for bilen idet den kjører gjennom svingen med avtakende banefart: sentripetalakselerasjonen $\vec{a}_r$ (pga. sirkelbevegelsen) og tangentialakselerasjonen $\vec{a}_t$, fordi banefarten avtar.



Akselerasjonen får altså retningen vist på figuren.

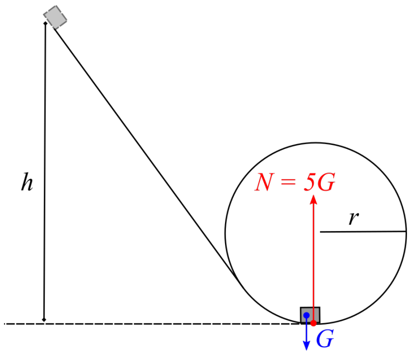
Riktig svar: **D**

d) Akselerasjonen på et tidspunkt er stigningstallet til fartsgrafen. Bilens fartsgraf viser at bilen starter med full gass og stor akselerasjon (grafen stiger bratt i starten), og så avtar farten mer og mer til den når en maksimalfart. Figuren under viser hvilken graf som er i tråd med denne situasjonen.



Riktig svar: **A**

e) Skal bestemme den største høyden h vogna kan slippes fra for at normalkrafta i det laveste punktet skal bli maksimalt $5G$, slik figuren under viser.



I det laveste punktet gir Newtons 2. lov følgende restriksjon på farten v i det laveste punktet:

$$\sum F = ma$$

$$N - G = m\frac{v^2}{r}$$

$$5G - G = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{(Grensetilfellet)}$$

$$4mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \underline{4gr}$$

Energibevaring mellom slippunktet i høyde h og det laveste punktet gir

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \underline{2gh}$$

Sammeholdt gir dette følgende verdi for den maksimale slipphøyden h:

$$4gr = 2gh \Rightarrow h = \underline{\underline{2r}}$$

Langsvar-del

Oppgave 6

a)

i) I det høyeste punktet i banen er farten $\vec{v}$ horisontal ($v_y = 0$), sånn at farten i det høyste punktet blir lik horisontalkomponenten v_{0x} av startfarten:

$$\begin{aligned} v &= v_{0x} \\ &= v_0 \cos\alpha \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \cdot \cos 35^\circ \\ &= \underline{\underline{8,2\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

ii) Finner først falltiden t (velger positiv retning oppover):

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y &= v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ -1,0 &= 10 \sin 35^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 && \text{(Sløyfer enheter)} \end{aligned}$$

Denne andregradslikninga har løsningen

$$t = 1,32\,\mathrm{s},$$

som gir at

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t \\ &= v_0 \cos\alpha \cdot t \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \cos 35^\circ \cdot 1,32\,\mathrm{s} \\ &= 10,8\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{11\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

iii) Løser likningen for x-retningen med hensyn på tiden t:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

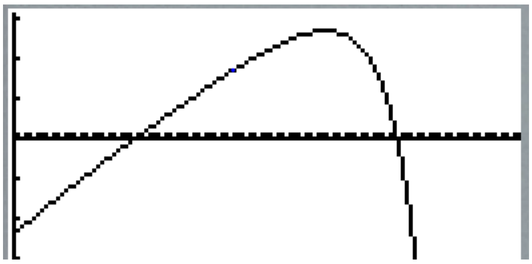
Setter i likningen for y-retningen:

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y &= v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 \\ y &= x \tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

Skal treffe midt i blinken når $x = 7,0\,\mathrm{m}$, og $y = -1,0\,\mathrm{m}$ og $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$(som før). Setter inn tall (sløyfer enheter):

$$\begin{aligned} -1,0 &= 7,0 \tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{9,81 \cdot 7,0^2}{10^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ 0 &= 7,0 \tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{9,81 \cdot 7,0^2}{10^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} + 1,0 \end{aligned}$$

Tegner grafen til høyresiden som en funksjon av α for $0 \leq \alpha \leq 90°$ og finner nullpunktene:



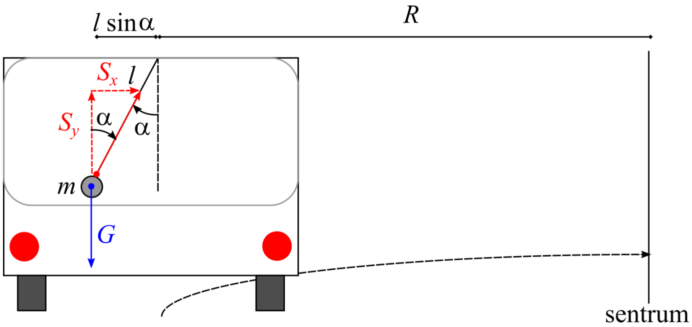
Får løsningene \

$$\alpha = 21,7° \approx \underline{\underline{22°}} \vee \alpha = 68,3° \approx \underline{\underline{68°}}$$

iii)

b)

i) Figuren under viser kreftene som virker på kula som henger i snora: snordraget S og tyngden G.



ii) Kula er i ro i vertikalretningen, sånn at

$$\sum F_y = 0$$
$$S_y = mg$$

Newtons 2. lov i x-retningen gir

$$\sum F_x = ma$$
$$S_x = \underline{m\frac{v^2}{r}},$$

der $r = R + l\sin\alpha$ (som er radiusen for kulas sirkelbevegelse). Sammenhengen mellom S_x og S_y vises fra figuren:

$$\begin{aligned} S_x &= S_y \tan\alpha \\ &= \underline{mg\tan\alpha} \qquad \text{(Ettersom } S_y = mg\text{)} \end{aligned}$$

Kombinerer dette og får

$$\begin{aligned} S_x &= m\frac{v^2}{r} \\ mg\tan\alpha &= m\frac{v^2}{r} \\ v^2 &= gr\tan\alpha \\ v &= \sqrt{gr\tan\alpha} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{g\left(R + l\sin\alpha\right)\tan\alpha}}} \end{aligned}$$

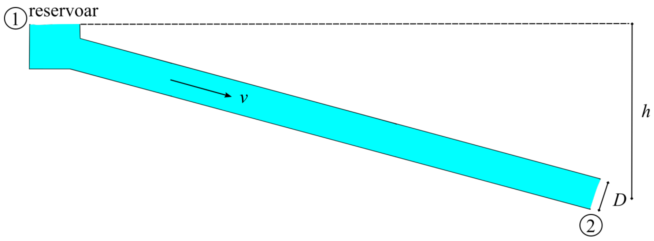
iii) Løser likningen fra forrige oppgave med hensyn på α:

$$\begin{aligned}
v^2 = gr\tan\alpha &\Rightarrow \tan\alpha = \frac{v^2}{gr} \\
\alpha &= \arctan\frac{v^2}{gr} \\
&= \arctan\frac{\left(\frac{70}{3,6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 70\,\mathrm{m}} \\
&= 28,8^\circ \\
&\approx \underline{\underline{29^\circ}}
\end{aligned}$$

Oppgave 7

a)

i) Figuren under viser en skisse av mikrokraftverket:



Bernoullis likning mellom punkt 1 (vannspeilet i reservoaret) og punkt 2 (rørutløpet):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Noen forenklinger: vi kan sette $p_1 = p_2$ (luft ved begge punkter), $v_1 \approx 0$ (vannspeilet har mye større tverrsnitt enn røret, og vil derfor sige veldig sakte nedover), $y_2 = 0$ (velger nullnivå her), $y_1 = h$. Dette gir:

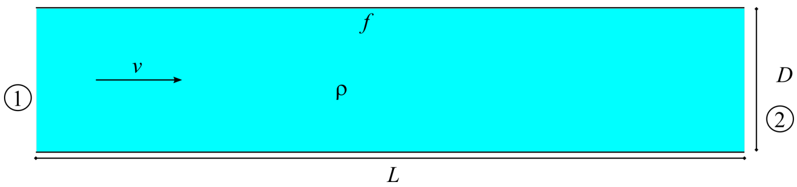
$$\begin{aligned}
\rho g h &= \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\
v_2 &= \sqrt{2gh} && \text{(Torricellis lov)} \\
&= \sqrt{2\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 2,0\,\mathrm{m}} \\
&\approx \underline{\underline{6,3\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}$$

ii) Maksimal effekt som kan hentes ut av turbinen finner vi fra et enkelt energiresonnement: i det "maksimale" tilfellet vil all kinetisk energi i vannet tilføres turbinen. Dvs. effekten som tilføres turbinen dersom væskefarten er v og rørtverrsnittet er $A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$ blir

$$\begin{aligned}
P_{max} &= \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{kinetisk energi pr. volum}} \cdot \underbrace{Q}_{\text{volumstrøm}} \\
&= \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot Av && \text{(Def. av volumstrøm)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1,0\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\cdot(5,0\,\mathrm{m/s})^2\cdot\pi\left(\frac{0,40\,\mathrm{m}}{2}\right)^2\cdot 5,0\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{7,9\,\mathrm{kW}}}
\end{aligned}$$

b)

i) Figuren under viser et horisontalt vannrør med punkter 1 og 2 i hver ende av røret:



Bernoullis likning med tapsledd mellom de to endene av røret (kun ett tapsledd h_f på grunn av rørfriksjonen):

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + y_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + y_2 + h_f$$

Forenklinger: ettersom røret er horisontalt er $y_1 = y_2$, og fordi tverrsnittet er konstant, er $v_1 = v_2 = v$. Dette gir:

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{\rho h} - \frac{p_2}{\rho g} &= h_f \\
p_1 - p_2 &= \rho g h_f \\
&= \rho g \cdot f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} && \text{(Tapsledd fra formelark)} \\
&= \underline{\underline{f\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho v^2}}
\end{aligned}$$

ii) Beregner æskefarten fra volumstrømmen:

$$\begin{aligned}
Q = Av \Rightarrow v &= \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} \\
v &= \frac{0,20\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\pi\left(\frac{1,0\,\mathrm{m}}{2}\right)^2} \\
&= \underline{0,255\,\mathrm{m/s}}
\end{aligned}$$

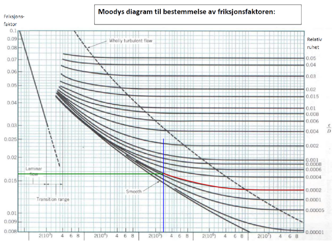
Da blir Reynoldstallet lik

$$\begin{aligned}
N_R &= \frac{\rho v D}{\eta} \\
&= \frac{1,0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0,255\,\mathrm{m/s} \cdot 1,0\,\mathrm{m}}{8,90 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pa \cdot s}} \\
&\approx \underline{2,9 \cdot 10^5}
\end{aligned}$$

Den relative ruheten er

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0,20\,\mathrm{mm}}{1,0\,\mathrm{m}} = \frac{0,20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1,0\,\mathrm{m}} = \underline{2 \cdot 10^{-4}}$$

Avlesning i Moodys diagram:



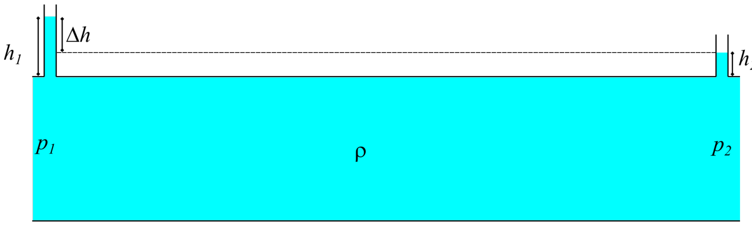
Leser av:

$$f \approx \underline{\underline{0,0165}}$$

iii) I oppgave i) fant vi et uttrykk for trykktapet mellom endene av røret:

$$\begin{aligned}
p_1 - p_2 &= f\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho v^2 \\
&= 0,0165 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{1,0\,\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (0,255\,\mathrm{m/s})^2 \\
&= 536\,\mathrm{Pa} \\
&\approx \underline{\underline{0,54\,\mathrm{kPa}}}
\end{aligned}$$

iv) Figuren under viser vannrøret med de to vannsøylene som kommer opp fra røret:



Væsketrykket p_1 må tilsvare trykket fra væskesøyla (pluss eventuelt lufttrykk på utsiden) rett over dette punktet, dvs.

$$p_1 = \rho g h_1 + p_0$$

Tilsvarende blir

$$p_2 = \rho g h_2 + p_0$$

Trykkforskjellen blir

$$\begin{aligned}
p_1 - p_2 &= \rho g h_1 + p_0 - (\rho g h_2 + p_0) \\
&= \rho g (h_1 - h_2) \\
&= \underline{\rho g \Delta h}
\end{aligned}$$

Dette gir at høydeforskjellen blir

$$\Delta h = \underline{\underline{\frac{p_1 - p_2}{\rho g}}}$$

Oppgave 8

i) Massen av luft inne i sylinderen finner vi ved fra tilstandslikningen for ideell gass: trykket er $1,0\,\mathrm{bar} = 1,0 \cdot 10^5\mathrm{Pa}$, temperaturen er $20\,°\mathrm{C} = 298\,\mathrm{K}$ og sylindervolumet er

$$600\,\mathrm{cm}^3 = 600\left(10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^3 = 6,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$$

Tilstandslikningen for ideell gass gir:

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

Sammenhengen mellom masse m, molar masse M_m og stoffmengde n er

$$m = M_m \cdot n,$$

slik at

$$\begin{aligned}
m &= M_m \cdot n \\
&= M_m \cdot \frac{pV}{RT} \\
&= 28,97\,\mathrm{g/mol} \cdot \frac{1,0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 6,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3}{8,314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}} \cdot 293\,\mathrm{K}} \\
&= 0,714\,\mathrm{g} \\
&\approx \underline{\underline{0,71\,\mathrm{g}}}
\end{aligned}$$

ii) Vi skal nå bestemme temperaturen til lufta i sylinderen når turboen komprimerer lufta adiabatisk fra $p_1 = 1,0 \cdot 10^5$Pa og $T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C} = 293\mathrm{K}$ til $p_2 = 1,5\,\mathrm{bar} = 1,5 \cdot 10^5$Pa og en foreløpig ukjent sluttemperatur T_2 etter kompresjonen i turboen (oppgaven kalles sluttemperaturen T_1, men det gir mer selvforklarende notasjon dersom denne kalles T_2).

Vi tar utgangspunkt i adiabatlikningen for sammenhengen mellmo trykk og volum:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$$

Vi ønsker å bytte ut volumene V_1 og V_2 med temperaturene T_1 og T_2. Ut i fra den ideelle gasslikningen:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}$$

Setter inn i adiabatlikninga:

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{p_2} &= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma \\
\frac{p_1}{p_2} &= \left(\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}\right)^\gamma \\
\frac{p_1}{p_2} &= \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\gamma \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\gamma \\
\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\gamma} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\gamma \\
T_2 &= \underline{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot T_1}
\end{aligned}$$

Setter inn tallene:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot T_1 \\
&= \left(\frac{1,0 \cdot 10^5\mathrm{Pa}}{1,5 \cdot 10^5\mathrm{Pa}}\right)^{\frac{1-1,40}{1,40}} \cdot 293\mathrm{K} \\
&= \underline{\underline{329,0\mathrm{K}}}
\end{aligned}$$

Sluttemperaturen etter kompresjon i turboen er $329\,\mathrm{K} \approx 56\,°\mathrm{C}$.

iii) Vi skal nå bestemme massen av luft i sylinderen når turbo er tilkoblet, dvs. trykket er $1,5 \cdot 10^5$Pa, temperaturen er 329K og volumet er 600cm^3. Vi får på samme måte som i forrige oppgave:

$$\begin{aligned} m &= 28,97\,\mathrm{g/mol} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 6,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \cdot}{8,314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}} \cdot 329\,\mathrm{K}} \\ &= 0,953\,\mathrm{g} \\ &\approx \underline{\underline{0,95\,\mathrm{g}}} \end{aligned}$$

iv) Vi skal finne prosentvis effektøkning som kan oppnås ved å benytte turbo sammenliknet med en motor uten turbo. Det ble opplyst at motoreffekten er direkte proporsjonal med massen luft, så for å finne prosentvis effektøkning, kan vi beregne prosentvis økning av massen luft som suges inn i motoren hhv. med og uten turbo.

Den prosentvise økningen av massen luft - og dermed motoreffekten - er

$$\left(\frac{0,953\,\mathrm{g} - 0,714\,\mathrm{g}}{0,714\,\mathrm{g}}\right) \cdot 100\,\% = 33,5\,\% \approx \underline{\underline{34\,\%}}$$