Løsningsforslag eksamen TALM1008/1013 mai 2018

Oppgave 1

a)

Kation	Anion	Kjemisk formel	Systematisk navn	Type forbindelse (kovalent eller ionisk)
Fe^{2+}	PO_4^{3-}	$Fe_3(PO_4)_2$	Jern(II)fosfat	Ionisk
-	-	SF_6	Svovelheksafluorid	Kovalent
NH_4^+	Cl^-	NH_4Cl	Ammoniumklorid	Ionisk
Ti^{4+}	O^{2-}	TiO_2	Titan(IV)oksid	Ionisk
-	-	CS_2	Karbondisulfid	Kovalent
-	-	Cl_2O_7	Diklorheptaoksid	Kovalent
Na^+	CO_3^{2-}	Na_2CO_3	Natriumkarbonat	Ionisk
Ca^{2+}	NO_3^-	$Ca(NO_3)_2$	Kalsiumnitrat	Ionisk
-	-	PBr_5	Fosforpentabromid	Kovalent
Al^{3+}	OH^-	$Al(OH)_3$	Aluminiumhydroksid	Ionisk

b) De tre sterke atombindingene er metallbindinger, ionebindinger og kovalente bindinger.

Metallbindinger finner vi mellom metallatomer. Her er atomene ordnet tett i tett og lagvis, med valenselektronene ordnet i en elektronsky/sjø rundt. De delokaliserte valenselektronene gjør at metaller kan lede strøm, og de tett plasserte atomene gjør det mulig å forskyve metallatomene i henhold til hverandre under kraftpåføring. Metallbindinger finner vi i rene metaller og i legeringer.

Ionebindinger er bindinger mellom et metallatom og et ikke-metallatom, hvorpå det er stor forskjell i elektronegativtetsverdiene mellom de ($\Delta EN \geq 2.0$). Pga denne forskjellen i elektronegativitet vil atomene trekke svært ulikt på elektronene, slik at vi får en nærmest fullstendig elektronoverføring fra kationet (metallionet) til anionet (ikke-metallet). Ionebindinger finner vi i ioniske forbindelser, altså salter.

Kovalente bindinger er atombindinger mellom to ikke-metaller. Her er differansen i elektronegativitet lavere enn 2.0, hvorpå elektronene deles omtrentlig likt (upolar kovalent) eller ulikt og danner ulike poler i molekylet (polar kovalent). En kovalent binding kan enten være enkel-, dobbel- eller trippel, avhengig av hvor mange elektronpar som er delt mellom atomene. Kovalente bindinger finner vi i både organiske og uorganiske forbindelser.

Oppgave 2

a) $NO(g) + NO_2(g) \leftrightarrow N_2O(g) + O_2(g)$

Fyller en tom beholder med 0,500 mol NO_2(g) og 0,500 mol NO(g). Volumet er 5 liter. Kan beregne konsentrasjonen av disse komponentene ved start:

$$[NO_2] = [NO] = \frac{n}{V} = \frac{0{,}500\ mol}{5\ liter} = 0{,}10\ M$$

Uttrykket for likevektskonstanten er gitt ved:

$$K_C = \frac{[O_2][N_2O]}{[NO_2][NO]} = 0{,}914$$

Setter opp tabell over konsentrasjonen til komponentene ved start og ved likevek:

	NO (g)	**NO_2(g)**	**N_2O(g)**	**O_2(g)**
Ved start	0,10 M	0,10 M	0	0
Endring	-x	-x	+x	+x
Ved likevekt	0,10- x	0,10- x	x	x

Setter inn i likevektsuttrykket:

$$K_C = \frac{x * x}{(0{,}1 - x)(0{,}1 - x)} = 0{,}914$$

Ordner uttrykket med hensyn på x og får:

$$0{,}086x^2 + 0{,}1828x - 0{,}00914 = 0$$

Løser med hensyn på x, og får:

$$\boldsymbol{x = 0{,}0489\ M}$$

Likevektskonsentrasjonene blir da:

$$[\boldsymbol{NO_2}] = [\boldsymbol{NO}] = \mathbf{0{,}10}\ \boldsymbol{M} - \mathbf{0{,}0489}\boldsymbol{M} = \mathbf{0{,}051}\ \boldsymbol{M}$$

$$[\boldsymbol{N_2O}] = [\boldsymbol{O_2}] = \boldsymbol{x} = \mathbf{0{,}0489}\ \boldsymbol{M}$$

b)

i) Øker temperaturen i beholderen: likevekt forskyves mot venstre for å senke temperaturen.

ii) Øker beholderens volum: ingen endring i likevekten, fordi det er to gassmolekyler på hver side av likevektspilen.

iii) Tilfører katalysator til beholderen: ingen endring i likevekten. En katalysator øker kun reaksjonshastigheten, men deltar ikke i selve reaksjonen.

iv) Tilfører mer nitrogendioksid til beholderen: likevekten forskyves mot høyre, for å redusere konsentrasjonen av NO_2(g).

Oppgave 3

- 0,20 M HCl-løsning. HCl er ei sterk syre, og dissosierer derfor fullstendig i vannløsning.

$HCl(aq) \rightarrow Cl^-(aq) + H^+(aq)$

$[H^+] = [HCl] = \mathbf{0,20\ M}$

$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{0,20} = \mathbf{5 * 10^{-14}\ M}$

$pH = -log[H^+] = -\log(0,20) = \mathbf{0,70}$

$pOH = 14 - pH = 14 - 0,70 = \mathbf{13,3}$

- 0,0010 M NaHCOO

NaHCOO er et lettløselig salt, som dissosierer fullstendig i vannløsning:

$NaHCOO(aq) \rightarrow HCOO^-(aq) + Na^+(aq)$

$HCOO^-$ er en svak base.

$HCOO^-(aq) + H_2O(l) \leftrightarrow HCOOH\ (aq) + OH^-(aq)$

Setter opp uttrykket for basekonstanten:

$$K_b = \frac{[OH^-][HCOOH]}{[HCOO^-]} = \frac{10^{-14}}{Ka, HCOOH} = \frac{10^{-14}}{1,6 * 10^{-4}} = 6,25 * 10^{-11}$$

	$HCOO^-(aq)$	$HCOOH\ (aq)$	$OH^-(aq)$
Ved start	0,0010 M	0	0
Endring	-x	+x	+x
Ved likevekt	0,0010- x	x	x

$$\frac{x * x}{0,0010 - x} = 6,25 * 10^{-11}$$

Ordner uttrykket med hensyn på x og får:

$x^2 + 6{,}25 * 10^{-11}x - 6{,}25 * 10^{-14} = 0$

Løser med hensyn på x og får:

$\boldsymbol{x = 2{,}5 * 10^{-7}\ M}$

$[OH^-] = \boldsymbol{2{,}5 * 10^{-7}\ M}$

$[H^+] = \frac{10^{-14}}{2{,}5 * 10^{-7}} = \boldsymbol{4 * 10^{-8}\ M}$

$pH = -log[H^+] = -\log(4 * 10^{-8}) = \boldsymbol{7{,}4}$

$pOH = 14 - pH = 14 - 7{,}4 = \boldsymbol{6{,}6}$

b) I 150 mL vann kan vi maksimalt få løst opp av $MgCO_3$:

$MgCO_3 = Mg^{2+} + CO_3^{2-}$

1 : 1 : 1 – molforhold

Setter opp uttrykket for Ksp og beregner x:

Ksp = $[Mg^{2+}] * [CO_3^{2-}]$ = x * x = 1,0 * 10^{-5}

= $\sqrt{x^2}$ = $\sqrt{1{,}0 * 10^{-5}}$ = 3,16 * 10^{-3} M = $[MgCO_3]$

Beregner massen fra stoffmengden dette tilsvarer

n = 3,16 * 10^{-3} M * 0,150 L = 4,74 * 10^{-4} mol

Mm_{MgCO3} = 24,305 + 12,01 + (3 * 16,00) = 84,315 g/mol

m = n * Mm = 0,03997 g ≈ **40,0 mg.**

c) 200 ml 0,050 M $BaCl_2$ + 500 ml 0,025 M Na_2SO_4 → Felling??

Vi har følgende ioner i løsningen: $Na^+, Ba^{2+}, Cl^-, SO_4^{2-}$. Det er kun $BaSO_4$ som er et tungtløselig salt.

Netto ioneligning: $Ba^{2+}(aq) + SO_4^{2-}(aq) \rightarrow BaSO_4(s)$

$K_{sp} = 1{,}0 * 10^{-10}$

Må beregne reaksjonskvotienten: $Q = [Ba^{2+}][SO_4^{2-}]$

Finner konsentrasjonen av ionene etter blanding:

$$[Ba^{2+}] = \frac{[BaCl_2] * V}{Vtot} = \frac{0{,}050M * 200\ ml}{(200 + 500)ml} = 0{,}0143\ mol/l$$

$$[SO_4^{2-}] = \frac{[Na_2SO_4] * V}{Vtot} = \frac{0{,}025\ M * 500\ ml}{(200 + 500)ml} = 0{,}0179\ mol/l$$

$$Q = 0{,}0143 \frac{mol}{l} * 0{,}179 \frac{mol}{l} = 2{,}55 * 10^{-4}$$

Q>K_{sp} og vi har derfor en overmettet løsning→ utfelling av $BaSO_4$.

Oppgave 4

a) Redoksreaksjonens oksidasjonstall blir:

+VII -II   +III -II   +I   +II   +IV –II   +I -II

MnO_4^- (aq) + $C_2O_4^{2-}$ (aq) + H^+ (aq) → Mn^{2+} (aq) + CO_2 (g) + H_2O (l)

Fremgangsmåte for balansering:

Red: MnO_4^- + 5e- → Mn^{2+} | * 2
Oks: $C_2O_4^{2-}$ → $2CO_2$ + 2e- | * 5
TOT: 2 MnO_4^- + $5C_2O_4^{2-}$ → $2Mn^{2+}$ + $10CO_2$

$2MnO_4^-$ (aq) + $5C_2O_4^{2-}$ (aq) + H^+ (aq) → $2Mn^{2+}$ (aq) + $10CO_2$ (g) + H_2O (l)

Balanserer i henhold til masse:

$2MnO_4^-$ (aq) + $5C_2O_4^{2-}$ (aq) + $4H^+$ (aq) → $2Mn^{2+}$ (aq) + $10CO_2$ (g) + $2H_2O$ (l)

Sjekker ladningsbalansen:

-2	-10	+4	=	4+
-8			=	4 +

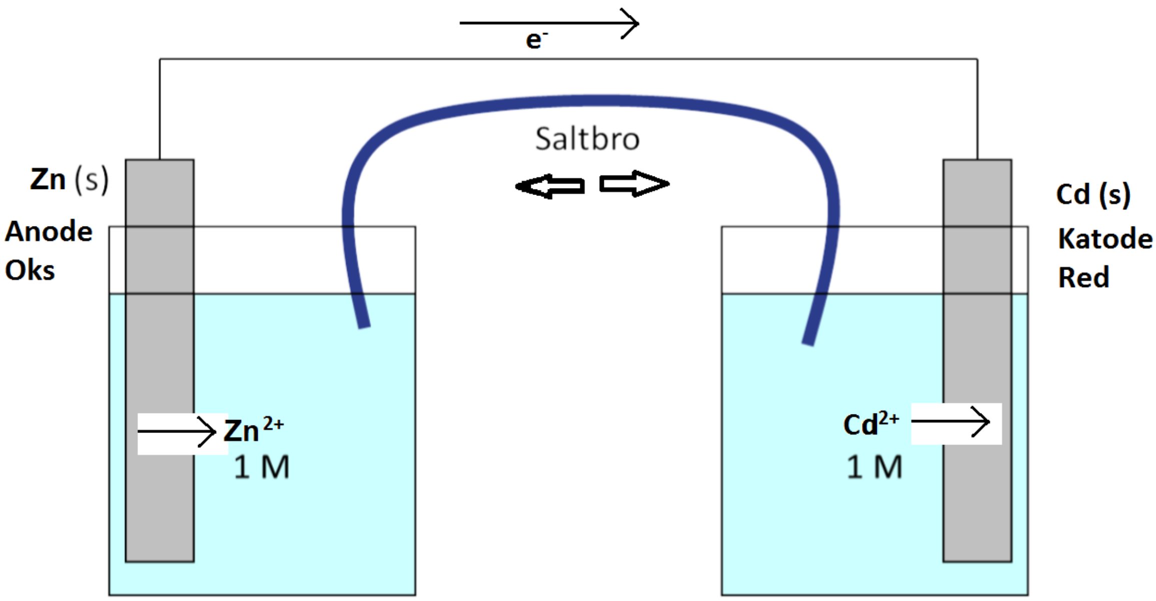
Må dermed balansere med henhold til ladning:
$2MnO_4^-$ (aq) + $5C_2O_4^{2-}$ (aq) + $16H^+$ (aq) → $2Mn^{2+}$ (aq) + $10CO_2$ (g) + $8H_2O$ (l)

Balansert reaksjonsligning blir derav:

$2MnO_4^-$ (aq) + $5C_2O_4^{2-}$ (aq) + $16H^+$ (aq) → $2Mn^{2+}$ (aq) + $10CO_2$ (g) + $8H_2O$ (l)

b) Galvanisk celle:

i) Skisserer opp cellen:



ii) Ser nærmere på cellen og finner:

Anode: Sink-elektroden (negativ pol)

Katode: kadmium-elektroden (positiv pol)

Setter opp halvreaksjoner med halvcellepotensialer:

Red: $Cd^{2+} + 2\ e^- \rightarrow Cd$ $\qquad E^o_{red} = -0{,}40$ V

Oks: $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2\ e^-$ $\qquad E^o_{oks} = -\ E^o_{red} = +0{,}76$ V

Totalreaksjon: $Zn\ (s) + Cd^{2+}\ (aq) \rightarrow Zn^{2+}\ (aq) + Cd\ (s)$

iii) Finner cellepotensialet til denne cellen ved 25 ^oC:

$E^o_{celle} = E^o_{red} + E^o_{oks} = -0{,}40\ V + 0{,}76\ V = \underline{0{,}36\ V}$

Bruker Nernst ligning til å finne cellepotensialet ved ikke-standard betingelser:

$$E = E° - \frac{0{,}059\ V}{ne-} \log Q = 0{,}36\ V - \frac{0{,}059\ V}{2} \log \frac{0{,}0020\ M\ Zn2+}{0{,}10\ M\ Cd2+} = \underline{\mathbf{0{,}41\ V}}$$

c) Metallisk sølv (Ag (s)) løser seg i salpetersyre (HNO_3):

Salpetersyre er en sterk syre som vil gi en fullstendig protolyse:
HNO_3 (aq) → H^+ (aq) + NO_3^- (aq)

For at sølv skal løse seg opp må vi få dannet sølvioner når sølv reagerer med H^+ og/eller NO_3^-. Dette krever en oksidasjon av sølvet som gir følgende halvreaksjoner:

Red: $NO_3^- + 4H^+ + 3\ e^- \rightarrow NO\ (g) + 2H_2O\ (l)$ |*1 $E^o_{red} = +0{,}96$ V

Oks: $Ag\ (s) \rightarrow Ag^+\ (aq) + e^-$ |* 3 $E^o_{oks} = -E^o_{red} = -0{,}80$ V

TOT: $NO_3^- + 4H^+ + 3\ Ag \rightarrow 3Ag^+\ (aq) + NO\ (g) + 2H_2O$

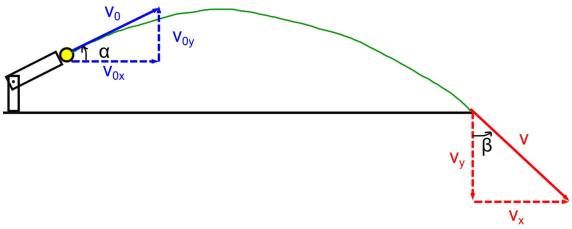
$E^o_{celle} = E^o_{red} + E^o_{oks} = +0{,}96\ V + (-0{,}80\ V) = +0{,}16\ V$

$E^o > 0$, ergo vil dette være en spontan reaksjon, og metallisk sølv vil altså kunne løse seg i salpetersyre ved 25 °C ved standard betingelser.

Dette gir derav følgende balansert totalreaksjon:
$3\ Ag\ (s) + NO_3^-\ (aq) + 4H^+\ (aq) \rightarrow 3\ Ag^+\ (aq) + NO\ (g) + 2H_2O\ (l)$

Løsningsforslag mai 2018

Oppgave 5



a) Vi skal bestemme hvor langt unna utgangspunktet kula lander. Vi har følgende bevegelseslikninger for x- og y-retningen:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha t$$
$$y = v_{0t}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Bestemmer falltiden/svevetiden (med dette valget av positiv retning, er posisjonen negativ idet kula treffer bakken) ved å løse andregradslikningen med innsatte tall $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ og $\alpha = 30\,^\circ$:

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$-0,35 = 10 \sin 30\,^\circ \cdot \mathrm{t} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot \mathrm{t}^2$$

Løser denne på kalkulator og får

$$t = 1,09\,\mathrm{s} \vee t = -0,065\,\mathrm{s}$$

Her er det kun den positive løsningen som er av interesse. Avstanden fra utgangspunktet blir altså

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha t \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \cdot \cos 30\,^\circ \cdot 1,09\,\mathrm{s} \\ &= \underline{\underline{9,4\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

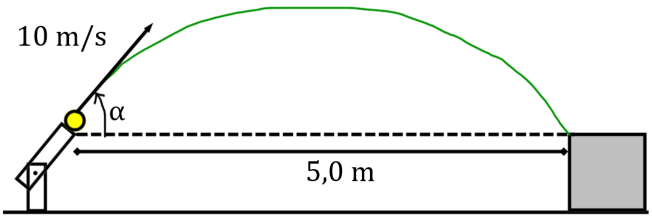
b) Vi bestemmer sluttfarten v, verdi og retning (angitt ved vinkelen β på figuren). Fartskompontene er gitt ved (konstant fart i x-retning; konstant akselerasjon i y-retning):

$$v_x = v_{0x} = 10\,\mathrm{m/s} \cos 30\,^\circ = \underline{8,66\,\mathrm{m/s}}$$
$$v_y = v_{0y} - gt = 10\,\mathrm{m/s} \sin 30\,^\circ - 9,81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 1,09\,\mathrm{s} = \underline{-5,69\,\mathrm{m/s}}$$

Farten blir

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(8,66\,\mathrm{m/s})^2 + (-5,69\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 10,4\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{10\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

c) Vi skal bestemme startvinkelen α som gjør at ei kule med startfart $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ akkurat treffer oppi en eske som er plassert i en avstand $x = 5,0\,\mathrm{m}$ fra kulas utgangspunkt. Se figuren under.



Ettersom eskas overkant ligger i samme høyde som ballens utgangspunkt, er $y = 0$ idet den treffer eska. Vi skal altså løse likningene

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

med $x = 5,0\,\mathrm{m}$ og $y = 0$. Vi får:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \\ t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) &= 0 \end{aligned}$$

Den interessante løsningen er da

$$v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Innsatt i likningen for x-retningen får vi da

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

For å bestemme αskal vi altså løse likningen $x = 5,0\,\mathrm{m}$. Her kan vi f.eks. benytte oss av følgende trigonometriske identitet:

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

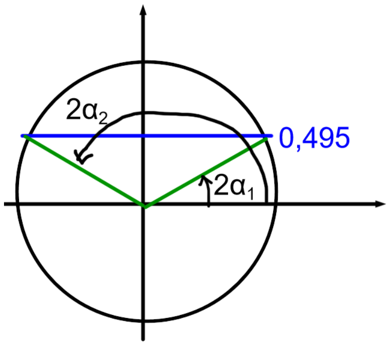
slik at likninga kan skrives

$$x = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{xg}{v_0^2}$$

Med innsatte tall blir likningen

$$\sin 2\alpha = \frac{5,0\,\mathrm{m} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}{(10\,\mathrm{m/s})^2} = 0,4905$$

Vi løser likningen fra enhetssirkelen (vi får to løsninger):



$$2\alpha_1 = \arcsin 0,495 = 29,66\,^{\mathrm{o}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}\cdot 29,66\,^{\mathrm{o}} = 14,8\,^{\mathrm{o}} \approx \underline{15\,^{\mathrm{o}}}$$

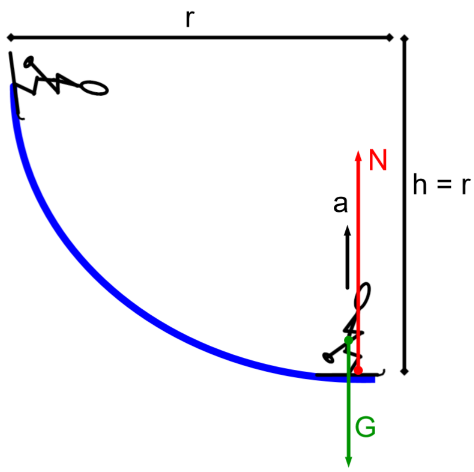
$$2\alpha_2 = 180\,^{\mathrm{o}} - 2\alpha_1 = 150,3\,^{\mathrm{o}} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}\cdot 150,3\,^{\mathrm{o}} = 75,2\,^{\mathrm{o}} \approx \underline{75\,^{\mathrm{o}}}$$

Vi får altså to mulige vinkler:

$$\underline{\underline{\alpha = 15\,^{\mathrm{o}} \vee \alpha = 75\,^{\mathrm{o}}}}$$

Oppgave 6

a)



i) Vi skal bestemme skiløperens akselerasjon i det laveste punktet. Ettersom alle kreftene virker vertikalt, er det kun sentripetalakselerasjon i dette punktet (dvs. ingen tangentiell akselerasjon). Akselerasjonen er gitt ved

$$a = \frac{v^2}{r},$$

der v er farten i det laveste punktet. Denne kan vi finne ved energibevaring: potensiell energi på toppen går over til kinetisk energi i bunnen:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh = 2gr$$

Vi får:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{v^2}{r} \\
&= \frac{2gr}{r} \\
&= \underline{\underline{2g}}
\end{aligned}
$$

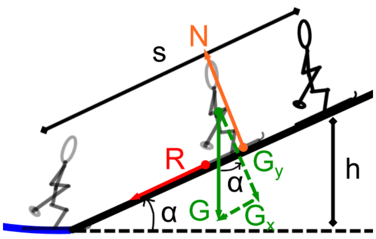
ii) Normalkraften i det laveste punktet er gitt fra Newtons 2. lov:

$$
\begin{aligned}
\sum F &= ma \\
N - G = ma &\Rightarrow N = ma + mg \\
N &= m \cdot 2g + mg = \underline{\underline{3mg}}
\end{aligned}
$$

Tallsvaret blir

$$
\begin{aligned}
N &= 3 \cdot 70\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \\
&= 2060\,\mathrm{N} \\
&\approx \underline{\underline{2,1\,\mathrm{kN}}}
\end{aligned}
$$

b) Skiløperen sklir oppover en bakke med helningsvinkel $\alpha = 40\,^\circ$ og glidefriksjonstall $\mu_k = 0,90$. Vi skal finne strekningen s som løperen glir før han stopper opp. Se figuren under.



Vi kan bruke energibevaring: kinetisk energi i det laveste punktet der farten er v, går over til potensiell energi, samt friksjonsarbeid langs strekningen s. Hvis friksjonskraften er R, blir regnskapet som følger:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + R \cdot s$$

Friksjonskrafta R er gitt ved

$$R = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot G_y = \mu_k \cdot mg\cos\alpha,$$

der det er brukt at normalkrafta N er like stor som tyngdekomponenten G_y som står normalt på skråplanet. Innsatt i regnskapet:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \mu_k \cdot mg\cos\alpha \cdot s$$

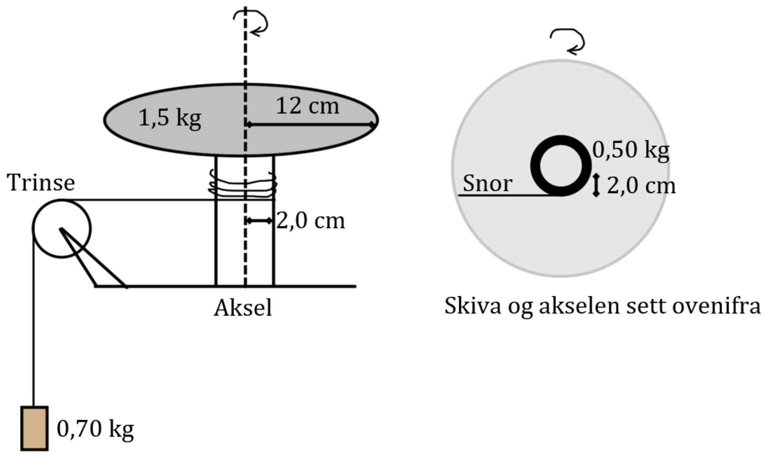
Dessuten er

$$h = s\sin\alpha,$$

slik at

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= mg \cdot s \sin\alpha + \mu_k \cdot mg\cos\alpha \cdot s \\
s\left(g\sin\alpha + \mu_k g\cos\alpha\right) &= \frac{1}{2}v^2 \\
s &= \frac{\frac{1}{2}v^2}{g\sin\alpha + \mu_k g\cos\alpha} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot 2gr}{g\sin\alpha + \mu_k g\cos\alpha} \\
&= \frac{r}{\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha} \\
&= \frac{25\,\mathrm{m}}{\sin 40^{\,\mathrm{o}} + 0,90\cos 40^{\,\mathrm{o}}} \\
&= 18,8\,\mathrm{m} \\
&\approx \underline{\underline{19\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 7



a)

Vi skal bestemme det totale treghetsmomentet til systemet bestående av skive + aksel. Skive er en massiv sylinder med masse $M = 1,5\,\mathrm{kg}$ og radius $R = 12\,\mathrm{cm}$, mens akselen er en tynnvegget sylinder med masse $m = 0,50\,\mathrm{kg}$ og radius $r = 2,0\,\mathrm{cm}$. Vi finner treghetsmomentene fra tabellen på formelarket:

Skive:

$$
I_{skive} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\cdot 1,5\,\mathrm{kg}\cdot(0,12\,\mathrm{m})^2 = 0,0108\,\mathrm{kgm}^2
$$

Aksel:

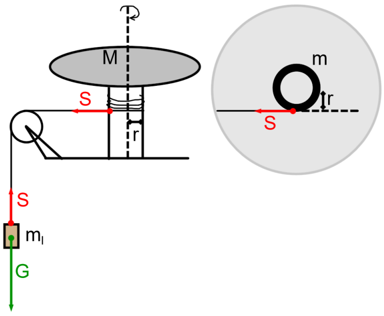
$$
I_{aksel} = mr^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,50\,\mathrm{kg}\cdot(0,020\,\mathrm{m})^2 = 0,00010\,\mathrm{kgm}^2
$$

Totalt treghetsmoment:

$$
\begin{aligned}
I &= I_{skive} + I_{aksel} \\
&= 0,0108\,\mathrm{kgm}^2 + 0,00010\,\mathrm{kgm}^2 \\
&= 0,0109\,\mathrm{kgm}^2 \\
&\approx \underline{\underline{0,011\,\mathrm{kgm}^2}}
\end{aligned}
$$

b)

i) Vi skal tegne kreftene som virker på loddet og akselen når loddet faller.



På loddene virker tyngden G og snordraget S; på akselen virker et snordrag som har samme absoluttverdi som snordraget på loddet.

ii) Vi skal bestemme loddets akselerasjon. Vi setter opp Newtons 2. lov for hhv. translasjon (for loddet) og rotasjon (for systemet bestående av aksel+skive).

Lodd som faller med akselerasjon a:

$$\sum F = m_l a$$
$$m_l g - S = m_l a$$

Aksel+skive som roterer med vinkelakselerasjon α:

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$S \cdot r = I\alpha$$

Ettersom snora løper av akselen som har radius r, blir sammenhengen mellom akselens lineærakselerasjon a, og vinkelakselerasjonen α gitt ved

$$a = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a}{r}$$

Dette gir at

$$S \cdot r = I\alpha \Rightarrow S = \frac{I}{r} \cdot \alpha = \frac{I}{r^2} a$$

Kombinerer de to likningene ved å sette inn for S:

$$m_l g - S = m_l a$$
$$m_l g - \frac{I}{r^2} a = m_l a$$
$$a\left(m_l + \frac{I}{r^2}\right) = m_l g$$
$$a = \frac{m_l}{m_l + \frac{I}{r^2}} g$$

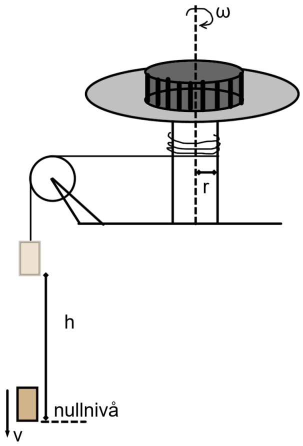
Setter inn oppgitte tall og får

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{0,70\,\mathrm{kg}}{0,70\,\mathrm{kg} + \frac{0{,}0109\,\mathrm{kgm}^2}{(0{,}020\,\mathrm{m})^2}} \cdot g \\
&= 0,025g \\
&= 0,246\,\mathrm{m/s}^2 \\
&\approx \underline{\underline{0,25\,\mathrm{m/s}^2}}
\end{aligned}
$$

iii) Snordraget er da gitt ved

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{I}{r^2} a \\
&= \frac{0,0109\,\mathrm{kgm}^2}{(0,020\,\mathrm{m})^2} \cdot 0,246\,\mathrm{m/s}^2 \\
&= 6,70\,\mathrm{N} \\
&\approx \underline{\underline{6,7\,\mathrm{N}}}
\end{aligned}
$$

c) Vi skal bestemme treghetsmomentet til et tannhjul som legges oppå skiva, og som gjør at loddet faller $0,80\,\mathrm{m}$ på $10\,\mathrm{s}$ når det slippes. Se figuren under.



Her kan vi f.eks. bruke energibevarelse: potensiell energi til loddet i utgangspunktet går over til kinetisk energi for loddet (translasjon), samt kinetisk energi fra rotasjonen til systemet av skive+aksel+tannhjul. Dersom loddet har falt en høyde h, og nullnivå for potensiell energi velges i det laveste punktet, blir regnskapet som følger:

$$m_l g h = \frac{1}{2} m_l v^2 + \frac{1}{2} I_{total} \omega^2,$$

der I_{total} er det totale treghetsmomentet for skive+aksel+tannhjul, og ω er vinkelhastigheten idet loddets fart er v. Vi bruker sammenhengen

$$v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r},$$

som gir

$$
\begin{aligned}
m_l gh &= \frac{1}{2} m_l v^2 + \frac{1}{2} I_{total} \left(\frac{v}{r}\right)^2 \\
m_l gh &= \frac{1}{2} m_l v^2 + \frac{1}{2} \frac{I_{total}}{r^2} v^2 \\
I_{total} &= \frac{2r^2}{v^2} \left(m_l gh - \frac{1}{2} m_l v^2 \right) \\
&= \frac{2 m_l r^2 gh}{v^2} - m_l r^2
\end{aligned}
$$

Vi kan nå bestemme I_{total} for så finne tannhjulets treghetsmomentet I_{hjul} ved å trekke i fra treghetsmomentet I til aksel+skive.

Ettersom loddet faller en høyde $h = 0,80\,\mathrm{m}$ i løpet av tiden $t = 10\,\mathrm{s}$, kan vi uttrykke sluttfarten v ved hjelp av h og t. Loddet faller med konstant akselerasjon, så vi kan bruke følgende bevegelseslikning, med $s = h$ og $v_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2} (v_0 + v)\, t \\
h &= \frac{1}{2} vt \Rightarrow v = \frac{2h}{t}
\end{aligned}
$$

Innsatt gir dette

$$
\begin{aligned}
I_{total} &= \frac{2 m_l r^2 gh}{v^2} - m_l r^2 \\
&= \frac{2 m_l r^2 gh}{\left(\frac{2h}{t}\right)^2} - m_l r^2 \\
&= \frac{m_l r^2 g t^2}{2h} - m_l r^2 \\
&= \underline{m_l r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{g t^2}{h} - 1 \right)}
\end{aligned}
$$

Setter inn tallverdier:

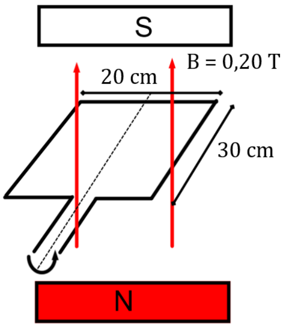
$$
\begin{aligned}
I_{total} &= 0,70\,\mathrm{kg} \cdot (0,020\,\mathrm{m})^2 \left(\frac{1}{2} \frac{9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (10\,\mathrm{s})^2}{0,80\,\mathrm{m}} - 1 \right) \\
&= \underline{0,1714\,\mathrm{kgm^2}}
\end{aligned}
$$

Ettersom tannjul+aksel+skive roterer sammen, er

$$
\begin{aligned}
I_{total} &= I_{hjul} + I_{aksel} + I_{skive} \Rightarrow I_{hjul} = I_{total} - I_{aksel} - I_{skive} \\
I_{hjul} &= 0,1714\,\mathrm{kgm^2} - 0,0109\,\mathrm{kgm^2} \\
&= 0,1605\,\mathrm{kgm^2} \\
&\approx \underline{\underline{0,16\,\mathrm{kgm^2}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 8

a) En generator, i form av en enkel strømsløyfe som roterer i et ytre magnetfelt, er konstruert slik figuren under viser:

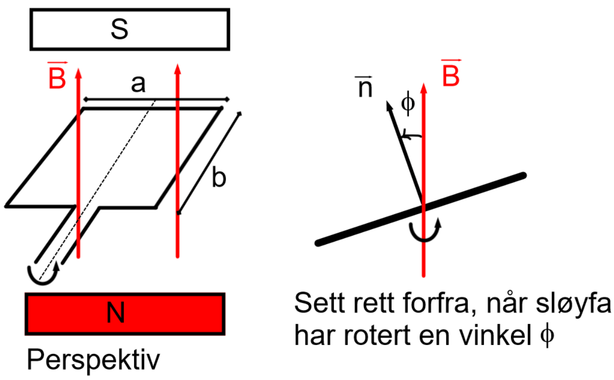


i) Vi har gitt at sløyfa roterer med konstant vinkelhastighet $\omega = 2\pi\,\mathrm{s}^{-1}$, og skal finne tiden for ett omløp. Denne finner vi fra sammenhengen (med $\phi_0 = 0$)

$$\phi = \phi_0 + \omega t \Rightarrow t = \frac{\phi}{\omega}$$

$$t = \frac{2\pi}{2\pi\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{\underline{1,0\,\mathrm{s}}}$$

ii) Figuren under viser sammenhengen mellom normalvektoren $\vec{n}$, magnetfeltet $\vec{B}$ og vinkelen ϕ mellom dem:



Ettersom vinkelhastigheten er konstant lik $\omega = 2\pi\,\mathrm{s}^{-1}$, er vinkelen ϕ gitt ved en standard "bevegelseslikning" for rotasjon, fra formelarket:

$$\phi = \phi_0 + \omega t = \underline{\underline{2\pi t}}$$

b)

i) Den induserte emsen i sløyfa som funksjon av tid er gitt ved Faradays induksjonslov:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Den magnetiske fluksen gjennom sløyfa som har areal $A = ab$ er gitt ved

$$\Phi = BA\cos\phi = B \cdot ab \cdot \cos(2\pi t)$$

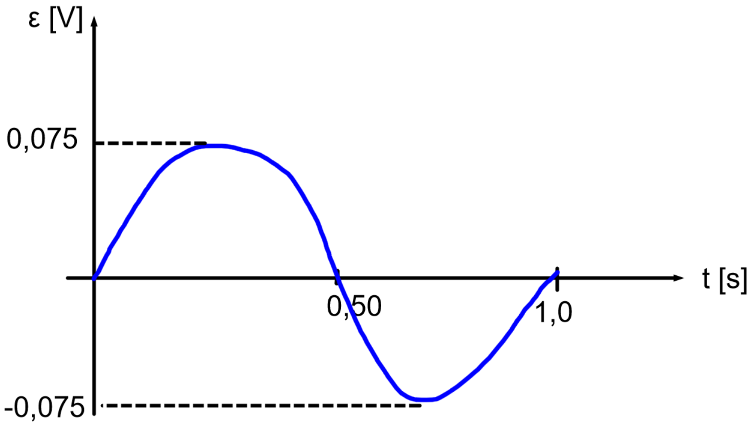
Den induserte emsen blir da (bruker kjerneregelen til å derivere cosinus-uttrykket):

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
&= -\frac{d}{dt}\left(B \cdot ab \cdot \cos(2\pi t)\right) \\
&= -B \cdot ab \cdot (-\sin(2\pi t)) \cdot 2\pi \\
&= \underline{2\pi Bab \sin(2\pi t)}
\end{aligned}$$

Setter inn oppgitte tall og får

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 2\pi \cdot 0,20\,\mathrm{T} \cdot 0,20\,\mathrm{m} \cdot 0,30\,\mathrm{m} \sin(2\pi t) \\
&= \underline{\underline{0,075\,\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi t)}}
\end{aligned}$$

ii) Skisserer $\varepsilon(t)$ for én hel omdreining (fant tidligere at sløyfa bruker $1,0\,\mathrm{s}$ på én hel runde):



iii) Det totale dreiemomentet τ på en strømsløyfe med strøm I, areal A, i et ytre magnetfelt B og med en vinkel ϕ mellom sløyfas normalvektor og magnetfeltet, er gitt ved

$$\tau = IAB \sin\phi$$

Vi skal bestemme dreiemomentet når $\phi = 90^o = \frac{\pi}{2}$. Ettersom vinkelfarten er $2\pi\,\mathrm{s}^{-1}$, blir tidspunktet at dette inntreffer er gitt fra oppgave a):

$$\begin{aligned}
\phi &= 2\pi t \Rightarrow t = \frac{\phi}{2\pi} \\
t &= \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi\,\mathrm{s}^{-1}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{s} = \underline{0,25\,\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Når resistansen er $R = 10\,\Omega$, blir strømmen gitt ved Ohms lov:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= IR \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} \\
I &= \frac{0,075\,\mathrm{V} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right)}{10\,\Omega} \\
&= \underline{0,0075\,\mathrm{A}}
\end{aligned}$$

Da er momentet lik

$$\begin{aligned}
\tau &= IAB \sin\phi \\
&= 0,0075\,\mathrm{A} \cdot 0,20\,\mathrm{m} \cdot 0,30\,\mathrm{m} \cdot 0,20\,\mathrm{T} \cdot \sin\frac{\pi}{2} \\
&= \underline{\underline{9,0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Nm}}}
\end{aligned}$$