NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Løysingsframlegg TFY 4104 Fysikk Kontinuasjonseksamen august 2010

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Onsdag 18. august 2010
kl. 09.00-13.00

Oppgåve 1

a) Vi deler inn skiva i konsentriske sirklar med breidde dr, omkrets $2\pi r$ og areal $dA = 2\pi r dr$. Massetettheiten til skiva er $\rho = m/\pi R^2$. Massen til sirkelen er difor $dm = \rho dA = 2mrdr/R^2$ Avstanden mellom sirkelen og aksen er r og bidraget til tregheitsmomentet $dI = r^2 dm = 2mr^3 dr/R^2$. Integrasjon gjev då

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{1}{2}mR^2 \,. \end{aligned}$$

Det vil seie

$$\alpha = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \,.$$

b) Det verkar ei friksjonskraft F og ei normalkraft N i kontaktpunktet. I tillegg verkar tyngdekrafta mg nedover. Newtons andre lov normalt på skråplanet gjev

$$mg\cos\beta - N = 0$$

eller

$$N = \underline{\underline{mg\cos\beta}} \; .$$

Det er berre tyngdekrafta som har eit kraftmoment τ om kontaktpunktet. Vi har da $\tau = mgR\sin\beta$. Dreiemomentet I_{kontakt} om kontaktpunktet er gitt ved parallellakseteoremet og vi får $I_{\text{kontakt}} = I_{\text{kule}} + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$. Dette gjev

$$mgR\sin\beta = \frac{7}{5}mR^2\ddot{\theta} \; ,$$

der $\ddot{\theta}$ er vinkelakselerasjonen til kula. Rein rulling gjev $a = \ddot{\theta}R$ og vi får difor

$$a = \underline{\underline{\frac{5}{7}g\sin\beta}} \; .$$

Newtons andre lov parallelt med skråplanet gjev

$$mg\sin\beta - F = ma \; ,$$

eller

$$F = \underline{\underline{\frac{2}{7}mg\sin\beta}} \; .$$

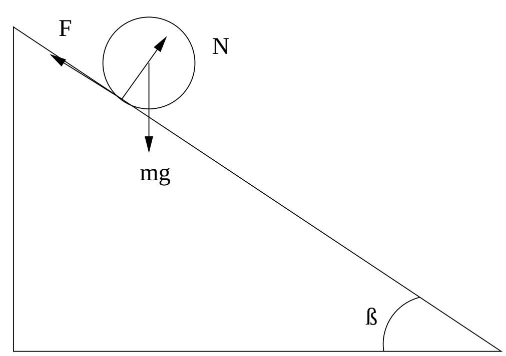

Figure 1: Kule som rullar ned eit skråplan.

c) Rørsla til kula er rotasjon rundt massesenteret pluss translasjon av massesenteret Den kinetiske energien er difor

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2_{\text{massesenter}} + \frac{1}{2}I_{\text{kule}}\omega^2 \\ &= \frac{7}{10}mv^2_{\text{massesenter}} \; , \end{aligned}$$

der vi har brukt at $v_{\text{massesenter}} = \omega R$ for rein rulling. Den potensielle energien var mgh. Bevaring av energien gjev då

$$mgh = \frac{7}{10} m v_{\text{massesenter}}^2 .$$

Dette gjev

$$v_{\text{massesenter}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{10}{7} gh}}}$$

Oppgåve 2

a) Arbeidet på gassen er $dW = -PdV$ Arbeidet for delprosessen $1 \to 2$ er difor

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} P\, dV ,$$

der V_1 er volumet i tilstand 1 og V_2 er volumet i tilstand 2. For ein adibat har vi $PV^\gamma = K$. Dette gjev

$$\begin{aligned} W_{12} &= -K \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV \\ &= \frac{K}{\gamma - 1} \left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{K V_1^{1-\gamma}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] . \end{aligned}$$

Vi har i tillegg $K = PV^\gamma = RTV^{\gamma - 1}$ der vi har brukt ideell gasslov $PV = RT$. Dette gjev

$$W_{12} = \underline{\underline{\frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right]}} .$$

Arbeidet for delprosessen $3 \to 4$ reknast ut heilt analogt og ein får

$$W_{34} = \underline{\underline{\frac{RT_3}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{1-\gamma} - 1 \right]}} .$$

Alternativt kan ein bruke at $W = C_V \Delta T$ for ein adiabat. Dette gjev

$$\begin{aligned} W_{12} &= \underline{\underline{\frac{3}{2} R(T_2 - T_1)}} \\ W_{34} &= \underline{\underline{\frac{3}{2} R(T_4 - T_3)}} . \end{aligned}$$

Ved å bruke adiabatlikninga og $\gamma = C_P/C_V = 5/3$ kan ein vise at desse uttrykka er like.

For dei andre delprossessane er arbeidet lik null fordi volumet er konstant, altså er

$$\begin{aligned} W_{23} &= \underline{\underline{0}} \,, \\ W_{41} &= \underline{\underline{0}} \,. \end{aligned}$$

b) For ein adiabat er varme tilført per definisjon lik null. Altså har vi

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \underline{\underline{0}} \,, \\ Q_{34} &= \underline{\underline{0}} \,. \end{aligned}$$

For ein isokor har vi

$$dQ = C_V dT \,,$$

der dQ er tilførd varme og dT er endringa i temperaturen. Dette gjev

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \int_{T_2}^{T_3} C_V \, dT \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}R(T_3 - T_2)}} \,. \end{aligned}$$

Tilsvarande får vi

$$\begin{aligned} Q_{41} &= \int_{T_4}^{T_1} C_V \, dT \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}R(T_1 - T_4)}} \,. \end{aligned}$$

c) Vi har

$$dS = \frac{dQ_{\mathrm{rev}}}{T} \,.$$

Sidan $dQ = 0$ for adiabatane får ein

$$\begin{aligned} \Delta S_{12} &= \underline{\underline{0}} \,, \\ \Delta S_{34} &= \underline{\underline{0}} \,. \end{aligned}$$

For isokorane får vi

$$\begin{aligned} \Delta S_{23} &= \int_{T_2}^{T_3} C_V \, \frac{dT}{T} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}R \ln \frac{T_3}{T_2}}} \,. \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\Delta S_{41} &= \int_{T_4}^{T_1} C_V \frac{dT}{T} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2} R \ln \frac{T_1}{T_4}}} \; .\end{aligned}$$

Summen av desse er

$$\Delta S_{\text{gass}} = \frac{3}{2} R \ln \frac{T_1 T_3}{T_2 T_4} \; .$$

Ved å bruke ideell gasslov kan adiabatlikninga skrivast som $TV^{\gamma-1} = K$. Dette gjev

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \; , \\ \frac{T_3}{T_4} &= \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} \; .\end{aligned}$$

Ein får da

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{gass}} &= \frac{3}{2} R(\gamma - 1) \ln \frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} \; . \\ &= \underline{\underline{0}} \; ,\end{aligned}$$

der vi har brukt $V_1 = V_4$ og $V_2 = V_3$ Entropien S er ein tilstandsfunksjon og etter ein syklus er tilstanden til gassen den same. Ergo er entropien den same og $\Delta S_{\text{gass}} = 0$ er ein konsekvens av dette.

Oppgåve 3

a) R_2 og R_3 er kopla parallelt, slik at den effektive motstanden R_{eff} er gjeven ved

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{\text{eff}}} &= \frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_3} \; , \\ &= \frac{4}{R}\end{aligned}$$

Dette gjev $R_{\text{eff}} = \frac{1}{4} R$. Denne er kopla i serie med motstanden $R_1 = \frac{3}{4} R$. Difor blir den totale effektive motstanden for kretsen

$$\begin{aligned}R_{\text{tot}} &= R_{\text{eff}} + R_1 \\ &= R \; .\end{aligned}$$

Straumen I_1 blir da

$$I_1 = \underline{\underline{\frac{V}{R}}} .$$

Spenningsfallet over R_1 er difor

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 R_1 \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{4}V}} . \end{aligned}$$

Spenningsfallet over R_2 og R_3 er difor

$$\begin{aligned} V_2 &= V_3 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4}V}} . \end{aligned}$$

Sidan $R_2 = R_3$ får vi $I_2 = I_3$:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_3 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{V}{R}}} . \end{aligned}$$

b) Spenninga over motstanden er $V = IR$, der $I = dQ/dt$. Spenninga over kondensatoren er $V = Q/C$. Summen av spenningane i kretsen er lik null. Altså er

$$\frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0 .$$

Løysinga til differensiallikninga er

$$Q(t) = Ke^{-t/RC} ,$$

der K er ein konstant. Sidan $Q(t = 0) = K$, får ein

$$Q(t) = \underline{\underline{Q_0 e^{-t/RC}}} .$$

c) Energien som er lagra i kondensatoren blir omgjort til varme i motstanden.

Oppgåve 4

a) Lorentzkrafta er

$$\vec{F} = \underline{\underline{q\vec{v} \times \vec{B}}} .$$

Krafta er i dette tilfellet

$$F = qvB \; .$$

Sidan akselerasjonen for sirkelbane med konstant banefart er $a = v^2/R$ gjev Newtons andre lov

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \; .$$

Dette gjev

$$R = \underline{\underline{\frac{mv}{qB}}} \; .$$

b) k er Coulombs konstant, q er den elektriske ladninga, r er avstanden frå ladninga til feltpunktet. $\vec{e}_r$ er ein einingsvektor i radiell retning.

c) Det elektriske feltet er

$$\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\vec{e}_r \; .$$

Vi kan velje ei kuleflate med radius r som Gaussflate. Då er normalvektoren til flata lik $\vec{e}_r$. Gauss' lov gjev

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS \\ &= kq \oint \frac{1}{r^2} dS \\ &= \underline{\underline{4\pi kq}} \; , \end{aligned}$$

der vi har brukt at arealet av kula er $A = 4\pi r^2$.

d) Ein isoterm prosess er ein prosess der temperaturen er konstant.

e) Dersom vi tilfører ei varmekraftmaskin varmemengda Q og maskina gjer eit arbeid W, er effektiviteten

$$e = \underline{\underline{\frac{W}{Q}}} \; .$$