NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Førebels løysingsframlegg TFY 4104 Fysikk Hausten 2010

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Fredag 10. desember 2010
kl. 09.00-13.00

Oppgåve 1

a) Vi reknar først ut tregheitsmomentet om ein akse gjennom massesenteret parallell med aksen i oppgåva. Vi deler inn skiva i konsentriske sirklar med breidde dr, omkrets $2\pi r$ og areal $dA = 2\pi r dr$. Massetettheiten til skiva er $\rho = m/\pi R^2$. Massen til sirkelen er difor $dm = \rho dA = 2mrdr/R^2$ Avstanden mellom sirkelen og aksen er r og bidraget til tregheitsmomentet $dI_{\rm cm} = r^2 dm = 2mr^3 dr/R^2$. Integrasjon gjev då

$$
\begin{aligned}
I_{\rm cm} &= \int dI_{\rm cm} \\
&= \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr \\
&= \frac{1}{2}mR^2 \,.
\end{aligned}
$$

Parallellakseteoremet gjev då

$$
\begin{aligned}
I &= I_{\rm cm} + mR^2 \\
&= \frac{3}{2}mR^2 \,.
\end{aligned}
$$

Altså er

$$\alpha = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

b) Bevegelsen er rotasjon om opphengningspunktet og bevegelseslikninga er

$$\tau \quad = \quad I\alpha \ ,$$

der τ er kraftmomentet og α er vinkelakselerasjonen. Dei to kreftene som verkar er tyngdekrafta og ei kraft S i opphengningspunktet. Det er berre tyngdekrafta som har eit moment τ om opphengningspunktet lik mgR. I tillegg er $a = \alpha R$ der a er akselerasjonen til massesenteret (sirkelbevegelse). Dette gjev

$$mgR \quad = \quad \frac{3}{2}mRa \ ,$$

der vi har brukt $I = \frac{3}{2}mR^2$. Ein får da

$$a \quad = \quad \underline{\underline{\frac{2}{3}g}} \ .$$

Newtons andre lov gjev

$$mg - S \quad = \quad ma$$

eller

$$S \quad = \quad \underline{\underline{\frac{1}{3}mg}} \ .$$

c) Dersom ein vel nullpunkt for den potensielle energien i nedre posisjon er $E^{\text{nedre}} = E_{\text{k}}^{\text{nedre}} + E_{\text{p}}^{\text{nedre}} = \frac{1}{2}I\omega_{\text{max}}^2$ og $E^{\text{nedre}} = E_{\text{k}}^{\text{øvre}} + E_{\text{p}}^{\text{øvre}} = mgR$. Bevaring av energi gjev

$$mgR \quad = \quad \frac{1}{2}I\omega_{\text{max}}^2 \ .$$

Dette gjev

$$\omega_{\text{max}} \quad = \quad \underline{\underline{\sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{R}}}} \ .$$

For dei som ikkje fekk til punkt a), kan ein skrive svaret $\omega_{\text{max}} = \sqrt{2g/R\alpha}$. Massesenteret beveger seg i sirkelbane med radius R og hastigheita er $v_{\text{max}} = \omega_{\text{max}}R$. Igjen verkar tyngdekrafta og ei kraft S_{max} i opphengningspunktet. Newtons andre lov for sirkelbevegelse gjev

$$S - mg \quad = \quad \frac{mv_{\text{max}}^2}{R}$$

Eller

$$S \quad = \quad mg + \frac{m}{R}\frac{4}{3}\frac{g}{R}R^2 = \underline{\underline{\frac{7}{3}mg}} \ .$$

Oppgåve 2

a) Pga kulesymmetri vil det elektriske feltet vere retta radielt utover og vi kan skrive

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r \, ,$$

der vi skal finne funksjonen $E(r)$. Vi legg inn ei Gaussflate som er ei kuleflate med radius r slik at $R_1 < r < R_2$. Den elektriske fluksen gjennom flata er da

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint \vec{E}\vec{n} \cdot dS \\ &= \oint E(r)\, dS \\ &= 4\pi r^2 E(r)\end{aligned}$$

der vi har brukt at normalvektoren $\vec{n} = \vec{e}_r$ og at arealet til kuleflata er $A = 4\pi r^2$. Gauss' lov gjev da $4\pi r^2 E(r) = Q/\epsilon_0$, der Q_0 er ladninga innafor Gaussflata. Dette gjev

$$E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

eller

$$\vec{E} = \underline{\underline{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}}}\vec{e}_r \, .$$

b) Ohms lov $\vec{E} = \rho_l \vec{j}$ og resultatet i a) gjev

$$\vec{j}(r,t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2 \rho_l}\vec{e}_r \, .$$

c9 I tillegg har vi $I = -dQ/dt$ og $j = I/A$. der A er arealet av ei kuleflate med radius r. Dette gjev

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= -j4\pi r^2 \\ &= -\frac{Q(t)}{\epsilon_0 \rho_l} \, .\end{aligned}$$

Løysinga til denne differensiallikninga med $Q(t=0) = Q_0$ er

$$Q(t) = \underline{\underline{Q_0 e^{-t/\epsilon_0 \rho_l}}} \, .$$

Oppgåve 3

a) Infinitesimalt arbeid som gassen gjer på omgjevnaden er $dW = PdV$. Dette gjev

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{V_1}^{V_2} PdV \\ &= P_1 \int_{V_1}^{V_2} dV \\ &= P_1(V_2 - V_1) \\ &= \underline{\underline{nR(T_2 - T_1)}} . \end{aligned}$$

der vi har brukt at trykket er konstant. Varme tilført er $dQ = C_P dT = (C_V + nR)dT = \frac{5}{2}RdT$. Dette gjev

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{5}{2}nR \int_{T_1}^{T_2} dT \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{2}nR(T_2 - T_1)}} . \end{aligned}$$

b) Sidan prosessen er adiabatisk er $dQ = 0$. Dette gjev

$$Q_{23} = \underline{\underline{0}} .$$

c) Infinitesimalt arbeid gjort på gassen er $dW = -PdV$. Dette gjev

$$\begin{aligned} W_{31} &= -\int_{V_3}^{V_1} PdV \\ &= -nRT \int_{V_3}^{V_1} \frac{dV}{V} , \end{aligned}$$

der vi har brukt ideell gasslov $PV = nRT$. Integrasjon gjev

$$W_{31} = \underline{\underline{nRT_3 \ln \frac{V_3}{V_1}}} .$$

d) Sidan prosessen $1 \rightarrow 3$ er isoterm er den indre energien til gassen konstant. Det tyder at varmen Q_{31} som gassen avgjev er lik arbeidet som blir gjort på gassen:

$$Q_{31} = nRT_3 \ln \frac{V_3}{V_1} .$$

Verknadsgraden er

$$\begin{aligned} e &= 1 - \frac{Q_k}{Q_v} \\ &= 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12}} \\ &= \underline{\underline{1 - \frac{T_3 \ln \frac{V_3}{V_1}}{\frac{5}{2}(T_2 - T_3)}}} . \end{aligned}$$

Vi noterer oss at $V_3 > V_1$ og $T_2 > T_3$ (frå ideell gasslov og adiabatlikninga) og difor er $e < 1$. Dette er i samsvar med termodynamikkens 2.lov.

Oppgåve 4

a) Ei kraft $\vec{F}$ er konservativ viss og berre viss linjeintegralet rundt ei vilkårleg lukka kurve er lik null:

$$\underline{\underline{\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0}} \; .$$

Tyngdekrafta er ei konservativ kraft. Friksjon er ikkje er konservativ kraft.

b) Total magnetisk fluks gjennom sløyfa er

$$\Phi_m = \pi r^2 B_0 e^{-kt} \; .$$

Faradays induksjonslov gjev indusert elektromotorisk spenning

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \\ &= \underline{\underline{k\pi r^2 B_0 e^{-kt}}} \; . \end{aligned}$$

Ohms lov gjev straumen:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}}{R} \\ &= \underline{\underline{\frac{k\pi r^2 B_0}{R} e^{-kt}}} \; . \end{aligned}$$

Effekten i kretsen er $P(t) = \mathcal{E} I$. Total varmeenergi Q er integralet av $P(t)$. Dette gjev

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty P(t) dt \\ &= \frac{(k\pi r^2 B_0)^2}{R} \int_0^\infty e^{-2kt} \\ &= \underline{\underline{\frac{k(\pi r^2 B_0)^2}{2R}}} \; . \end{aligned}$$