NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Løysingsframlegg kontinuasjonseksamen TFY 4104 Fysikk august 2011

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Fredag 12. august 2011
kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgåve 1

a) Vi bruker bevaring av energi. Med nullpunkt i $y = 0$, får vi

$$mgl = \frac{1}{2}mv_1^2 \ .$$

Dette gjev

$$v_1 = \underline{\underline{\sqrt{2gl}}} \ .$$

b) Kula beveger seg i sirkelbane med radius $r = l$ og banefarta er v_1 når dei to kulene kolliderer. Akselerasjonen er difor $a = v_1^2/l$ og Newtons andre lov i radiell retning gjev då

$$\begin{aligned} S - mg &= mv_1^2/l \\ &= 2mg \ , \end{aligned}$$

eller

$$S = \underline{\underline{3mg}} \ .$$

c) Kollisjonen er fullstendig uelastisk som tyder at kulene beveger som ein lekam med masse $2m$ og fart v_2. Bevaring av impuls gjev

$$(2m)v_2 = mv_1 \ ,$$

eller

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{2}v_1 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2gl}}} \ . \end{aligned}$$

Den kinetiske energien etter kollisjonen er

$$\begin{aligned} E_k^{\text{etter}} &= \frac{1}{2}(2m)v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}mgl \ . \end{aligned}$$

Den kinetiske energien rett før kollisjonen er $E_k^{\text{før}} = \frac{1}{2}mv_1^2 = mgl$ og den kinetiske energien rett etter kollisjonen er $E_k^{\text{etter}} = \frac{1}{2}(2m)v_2^2 = \frac{1}{2}mgl$. Varmemengda Q er då differansen. Dette gjev

$$Q = \underline{\underline{\frac{1}{2}mgl}} \ .$$

d) Maksimalhøgda h finn ein frå bevaring av energi:

$$\begin{aligned} (2m)gh &= E_k^{\text{etter}} \\ &= \frac{1}{2}mgl \ . \end{aligned}$$

Dette gjev

$$h = \underline{\underline{\frac{1}{4}l}} \ .$$

Oppgåve 2

Sidan ladningsfordelinga er sylindersymmetrisk, er det elektriske feltet retta i radiell retning i xy-planet og avheng berre av avstanden r frå z-aksen, kan vi skrive

$$\vec{E} \;=\; E(r)\vec{e}_r \; .$$

Vi legg inn ei sylinderforma Gaussflate med radius r og lengde L. Den elektriske fluksen gjennom denne flata er

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS \\ &= 2\pi r L E(r)\;,\end{aligned}$$

der vi har nytta at $\vec{n} = \vec{e}_r$. Gauss' lov gjev da

$$2\pi r L E(r) \;=\; \frac{Q}{\epsilon_0}\;,$$

der Q er ladninga innafor Gaussflata. For $r < R$, er ladninga innafor

$$\begin{aligned}Q &= 2\pi L\rho_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' \\ &= 2\pi L\rho_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right)\;,\end{aligned}$$

og vi får

$$E(r) \;=\; \underline{\underline{\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right)}}\;.$$

For $r > R$ får vi

$$\begin{aligned}Q &= 2\pi L\rho_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r' dr' \\ &= 2\pi L\rho_0 \frac{R^2}{6}\;.\end{aligned}$$

Dette gjev

$$E(r) \;=\; \underline{\underline{\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{6r}}}\;.$$

Vi noterer oss at $E(r)$ er kontinuerleg.

b) Vi har

$$\vec{E} \;=\; -\nabla V\;.$$

I sylinderkoordinatar gjev dette

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \ .$$

Sidan vi har $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, gjev dette

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \ .$$

Integrasjon gjev for $r < R$

$$V(r) = \underline{\underline{-\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{9R}\right)}} \ ,$$

der integrasjonskonstanten $C = 0$ fordi $V(r = 0) = 0$. For $r > R$ får vi

$$V(r) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}R^2 \ln\frac{r}{R} + K \ ,$$

der K er ein (annan) integrasjonskonstant. Dersom vi krev at $V(r)$ er kontinuerleg i $r = R$ finn vi $K = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{5R^2}{36}$. Dette gjev

$$V(r) = \underline{\underline{\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}R^2\left(\ln\frac{r}{R} - \frac{5}{6}\right)}} \ .$$

Oppgåve 3

a) Varme tilført er $dQ = C_P dT = (C_V + nR)dT = \frac{5}{2}nRdT$. Dette gjev

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{5}{2}nR\int_{T_1}^{T_2} dT \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{2}nR(T_2 - T_1)}} \ . \end{aligned}$$

Vi har $dS = dQ_{\text{rev}}/T = C_P dT/T$. Entropiendringa blir difor

$$\begin{aligned} \Delta S_{12} &= \frac{5}{2}nR\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{2}nR\ln\frac{T_2}{T_1}}} \ . \end{aligned}$$

b) Arbeidet for ein adiabatisk prosess er

$$\begin{aligned} W_{23} &= C_V(T_3 - T_2) \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}nR(T_3 - T_2)}} \ . \end{aligned}$$

Sidan prosessen er adiabatisk er $dQ = 0$. Dette gjev

$$\Delta S_{23} \;=\; \underline{\underline{0}}\,.$$

c) Infinitesimalt arbeid gjort på gassen er $dW = -PdV$. Dette gjev

$$\begin{aligned} W_{31} &= -\int_{V_3}^{V_1} PdV \\ &= -nRT\int_{V_3}^{V_1}\frac{dV}{V}\,, \end{aligned}$$

der vi har brukt ideell gasslov $PV = nRT$ og at T er konstant. Integrasjon gjev

$$W_{31} \;=\; \underline{\underline{-nRT_3\ln\frac{V_1}{V_3}}}\,.$$

Vi har $dQ + dW = 0$ fordi den indre energien til gassen er konstant under ein isoterm prosess. Dette gjev

$$\begin{aligned} dS &= \frac{P}{T}dV \\ &= nR\frac{dV}{V}\,. \end{aligned}$$

Integrasjons gjev da

$$\begin{aligned} \Delta S_{31} &= nR\int_{V_3}^{V_1}\frac{dV}{V} \\ &= \underline{\underline{nR\ln\frac{V_1}{V_3}}}\,. \end{aligned}$$

Alternativt kan ein bruke at $Q_{31} = -W_{31}$ og at $S_{31} = Q_{31}/T_3$ sidan $T = T_1 = T_3$ er konstant.

d) Frå svara i a) - c) får vi

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{5}{2}nR\ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_1}{V_3} \\ &= \frac{5}{2}nR\ln\frac{T_2}{T_3} + nR\ln\frac{P_3}{P_2} \end{aligned}$$

der vi har brukt $T_1 = T_3$, $P_1 = P_2$ og $P_1V_1 = P_3V_3$. Adiabatlikninga gjev

$$\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} \;=\; \text{konstant}\,,$$

der $\gamma = C_P/C_V = 5/3$. Dette gjev samanhengen mellom trykk og temperatur i punkta 2 og 3:

$$\frac{P_3}{P_2} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} .$$

Dette gjev

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{5}{2}nR\ln\frac{T_2}{T_3} + nR\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_3}{T_2} \\ &= \underline{\underline{0}} .\end{aligned}$$

Sidan entropien er ein tilstandsfunksjon er det inga endring i entropien når gassen har gått gjennom ein syklus.

Oppgåve 4

a) Faradays induksjonslov er

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\vec{n}dS .$$

Her er $\vec{B}$ magnetfeltet, $\vec{n}$ er ein normalvektor til flata og dS er eit flateelement. $\mathcal{E}$ er den elektromotoriske spenninga og likninga seier at $\mathcal{E}$ er gjeve ved minus endringa i magnetisk fluks gjennom flata der positiv retning er gjeve ved høgrehandsregelen.

b) Den effektive kapasitansen har total ladning $Q = Q_1 + Q_2$. Vi bruker nå at $Q = CV$ for ein kondensator. Vi får

$$VC_{\text{eff}} = V_1C_1 + V_2C_2 ,$$

der V_1 er spenningsfallet over C_1, V_2 er spenningsfallet over C_2 og V er spenningsfallet over C_{eff}. Spenningsfalla over dei tre kondensatorane er like. Dette gjev

$$C_{\text{eff}} = \underline{\underline{C_1 + C_2}} .$$

c) Steiners sats er

$$I = \underline{\underline{I_{\text{cm}} + mh^2}} .$$

der $_{\text{cm}}$ er tregheitsmomentet for ei massefordeling om ein akse gjennom massesenteret og tregheitsmomentet I om ein akse som er parallell der avstanden mellom aksene er h og m er massen til fordelinga.