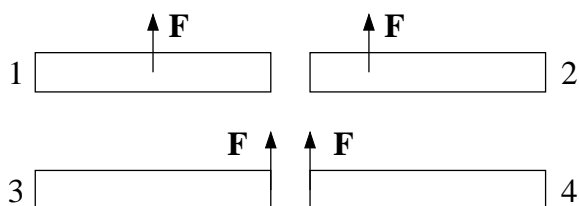


1) Panama gikk offisielt over fra US gallons til liter den 30. april i år. Bensinprisen var da ca 4 US dollar pr US gallon. Hva tilsvarer dette i kroner pr liter, når 1 krone er ca 0.164 US dollar og 1 liter er ca 0.264 US gallons?

$$(4 \cdot 0.264 / 0.164) (\text{USD}/\text{USgal})(\text{NOK}/\text{USD})(\text{USg}/\text{L}) = 6.44 \text{ NOK}/\text{L}$$

C) 6.44



2) Fire like staver utsettes for samme ytre kraft  $\mathbf{F}$ , men med ulike angrepspunkt. Ranger akselerasjonene  $a_i$  til massesenteret til stav nr  $i$ .

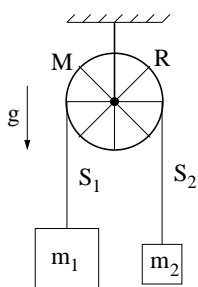
$$\text{N2: } \mathbf{F} = m\mathbf{a}_i \Rightarrow a_i = F/m$$

$$\text{B) } a_1 = a_2 = a_3 = a_4$$

3) Stavene i oppgave 2 er i ro ved tidspunktet  $t = 0$ . Deretter virker den konstante kraften  $\mathbf{F}$  (som vist i figuren) en kort tid  $\Delta t$  (slik at ingen av stavene har rotert så mye som  $90^\circ$  ved  $t = \Delta t$ ). Ranger stavenes totale kinetiske energi  $K_i$  ved  $t = \Delta t$ .

Lengst "arm" gir størst dreiemoment  $\tau$  (mhp massesenteret CM), dermed størst dreieimpuls  $L$ , dermed størst rotasjonsenergi, og dermed størst total kinetisk energi  $K$ .

$$\text{D) } K_1 < K_2 < K_3 = K_4$$



To lodd med masser  $m_1$  og  $m_2 < m_1$  er forbundet med ei tilnærmet masseløs snor som er lagt over et hjul med masse  $M$  og radius  $R$ . Eikene er tilnærmet masseløse, slik at hjulets treghetsmoment om akslingen er  $I_0 = MR^2$ . Hjulet er festet i taket og kan rotere friksjonsfritt om akslingen som går gjennom hjulets massesenter. I oppgave 4 – 6 antar vi at det er tilstrekkelig friksjon mellom snora og hjulet til at snora ikke glir på hjulet. I oppgave 7 antar vi null friksjon mellom snor og hjul. Tyngdens akselerasjon er  $g$ .

4) Hva kan du si om snordragene  $S_1$  og  $S_2$ ?

Netto dreiemoment på hjulet er  $S_1 R - S_2 R$  og gir rotasjon mot klokka hvis  $S_1 > S_2$ . Og med  $m_1 > m_2$  må vi jo få rotasjon mot klokka.

$$\text{B) } S_1 > S_2$$

5) Ved å måle loddenes hastighet  $(\pm)v$  kan du umiddelbart slå fast at hjulet roterer med vinkelhastighet

Når snora ikke glir på hjulet har vi "rullebetingelsen"  $v = \omega R$ .

B)  $v/R$

---

6) Hva er nå systemets totale dreieimpuls relativt hjulets massesenter?

Hjulet har indre dreieimpuls (spinn) mhp CM  $L_{\text{hjul}} = I_0\omega = MR^2 v/R = MRv$ . De to loddene har banedreieimpuls mhp CM hhv  $L_1 = m_1 Rv$  og  $L_2 = m_2 Rv$ . Alle bidrar med samme fortegn, dvs som vektorer  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  peker alle tre ut av planet. Dermed:  $L = MRv + m_1 Rv + m_2 Rv = (M + m_1 + m_2)Rv$ .

A)  $(M + m_1 + m_2)vR$

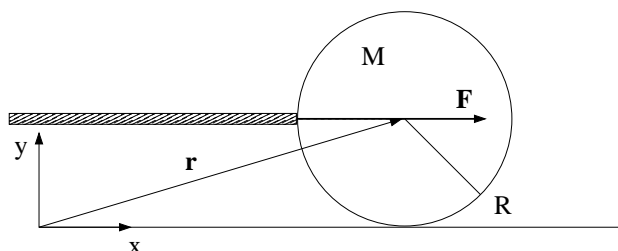
---

7) Anta nå null friksjon mellom snor og hjul, og la  $\beta < 1$  betegne forholdet mellom de to loddenes masser, dvs  $\beta = m_2/m_1$ . Hva blir da loddenes akselerasjon  $a$ ?

Uten friksjon mellom snor og hjul blir snordraget  $S$  likt i hele snora. N2 gir da  $m_1 g - S = m_1 a$  og  $S - m_2 g = m_2 a$ , med positiv retning nedover for  $m_1$  og oppover for  $m_2$  (siden vi vet hvilken vei de to vil bevege seg). Addisjon av disse to eliminerer  $S$  og gir  $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$ , dvs  $a = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) = g(1 - \beta)/(1 + \beta)$ .

D)  $a = g(1 - \beta)/(1 + \beta)$

---



Ei snookerkule med masse  $M$  og radius  $R$  får et kraftig, men kortvarig støt av en horisontal kø (stav). Kulas treghetsmoment relativt en akse gjennom dens massesenter er  $I_0 = 2MR^2/5$ . Vi legger et koordinatssystem  $xyz$  med origo på bordflata og  $xy$ -planet lik vertikalplanet gjennom kulas massesenter. Køen treffer kula (som ligger i ro) i  $xy$ -planet med en kraft  $F$  i  $x$ -retning. Treffpunktet er i samme høyde som massesenteret, se figuren. Støtet er så kraftig og så kortvarig at vi under selve støtet kan neglisjere innvirkningen av friksjonskraften  $f$  fra snookerbordet. Etter støtet, derimot, kan  $f$  generelt ikke neglisjeres. (Men vi ser bort fra luftmotstand.) Oppgavene 8 – 10 er knyttet til denne figuren.

---

8) Anta at kula har masse 167 gram, og at det virker en konstant kraft på 500 N i støtet, som varer i 1 millisekund. Hva blir da kulas hastighet umiddelbart etter at støtet er fullført?

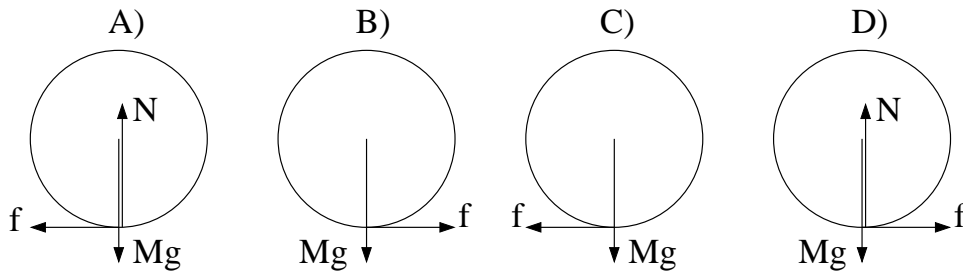
N2:  $F = \Delta p/\Delta t = MV_0/\Delta t \Rightarrow V_0 = F\Delta t/M = 500 \cdot 0.001/0.167 = 3 \text{ m/s}$ .

D) 3.0 m/s

---

9) Hvilken figur viser kreftene på kula like etter at støtet er fullført?

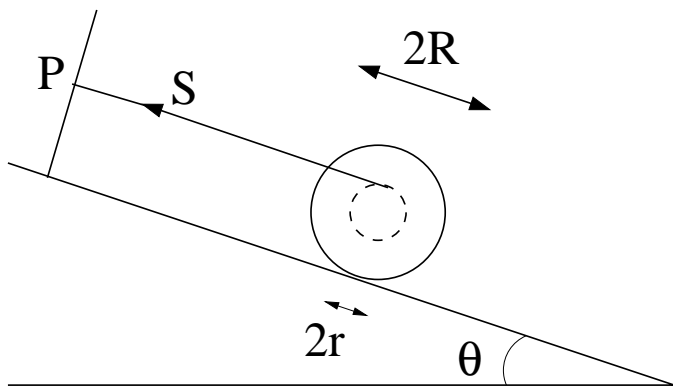
Mhp CM er  $\tau = 0$  i selve støtet, slik at kula glir uten å rulle i starten. Dermed må friksjonskraften  $f$  virke mot venstre, og figur A blir riktig.



10) Etter at støtet er fullført, er kulas dreieimpuls relativt origo,  $L = MRV + I_0\omega$ , bevart. Her er  $V$  og  $\omega$  hhv kulas hastighet og vinkelhastighet. Like etter støtet glir kula med hastighet  $V_0$ , uten å rotere. Hva er kulas hastighet når ren rulling er oppnådd?

Vi bruker dreieimpulsbevarelse:  $MRV_0 = MRV + I_0\omega$  som med ren rulling ( $V = \omega R$ ) og oppgitt treghetsmoment  $I_0$  gir  $MRV_0 = MRV + 2MRV/5 = 7MRV/5$ , dvs  $V = 5V_0/7$ .

D)  $5V_0/7$



Ei snelle, dvs to skiver med radius  $R$  forbundet med en aksling med radius  $r < R$ , ligger på et skråplan med helningsvinkel  $\theta$ . Ei snor er viklet om akslingen, og strukket parallellt med skråplanet til et festepunkt  $P$  som vist i figuren. Snellas treghetsmoment om akslingen er  $I_0$ , massen er  $M$ , statisk friksjonskoeffisient mot skråplanet er  $\mu_s$ , og kinetisk friksjonskoeffisient er  $\mu_k$ , der  $\mu_k < \mu_s$ . Oppgavene 11 – 13 er knyttet til denne figuren.

11) Med snella liggende i ro på skråplanet, hvilke tre ligninger fastlegger snordraget  $S$ , og friksjonskraften  $f$  og normalkraften  $N$  fra skråplanet på snella?

N1 normalt skråplanet gir  $N = Mg \cos \theta$  (som gjør A og D utelukket). N1 langs skråplanet gir  $f + S = Mg \sin \theta$  (som gjør C og D utelukket). N1 for rotasjon om CM gir  $fR = Sr$ . Dermed B.

B)  $\cos \theta = N/Mg,$        $\sin \theta = (f + S)/Mg,$        $r/R = f/S$

12) Hvilken fjerde ligning bidrar til å fastlegge  $\theta_0$ , dvs den maksimale skråplanvinkelen før snella begynner å slure nedover skråplanet?

Ved  $\theta_0$  har friksjonskraften  $f$  blitt maksimal:  $f = f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \theta_0$ , dvs D.

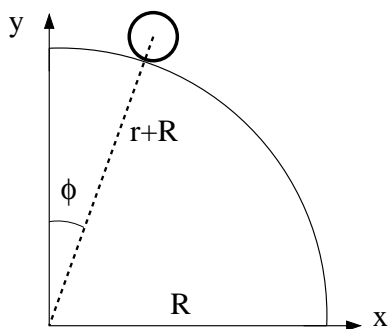
D)  $\cos \theta_0 = f/\mu_s Mg$

13) Hvis  $\theta > \theta_0$ , vil snella slure nedover skråplanet. Hva blir sammenhengen mellom snellas lineære aksele-

rasjon  $a$  og snellas vinkelakselerasjon  $\alpha$ ?

Her blir "rullebetingelsen"  $v = \omega r$ , dvs  $a = \alpha r$ .

A)  $a = \alpha r$



$i$	$t_i$ (ms)	$x_i$ (mm)	$y_i$ (mm)
1	0	130	792
2	33	140	791
3	67	151	789
4	100	163	786
5	133	176	783
6	167	190	780
7	200	206	776
8	233	222	771
9	267	241	766
10	300	261	759

Tabellen viser posisjon  $(x, y)$ , målt i enheten millimeter (mm), og tid  $t$ , målt i enheten millisekunder (ms), for massesenteret til en hul messingsylinder (dvs et "sylinderskall") som ruller på utsiden av en kvartsirkel med radius  $R$ . Sylinderen har indre radius 17 mm og ytre radius  $r = 19$  mm, samt masse  $m$ . Oppgavene 14 – 19 er knyttet til denne figuren og tabellen.

14) Kvartsirkelens radius  $R$  er ca

Pythagoras gir  $(r + R)^2 = x^2 + y^2$  og med f.eks  $i = 1$  er høyre side lik  $130^2 + 792^2 = 644164$  mm<sup>2</sup>. Dermed:  $R = \sqrt{644164} - r = 802.6 - 19 = 782.6 \simeq 784$  mm.

C) 784 mm

15) Et rimelig estimat for messingsylinderens treghetsmoment med hensyn på sylinderens symmetriakse gjennom dens massesenter er

Indre og ytre radius hhv 17 og  $r = 19$  mm betyr at treghetsmomentet må bli litt mindre enn  $mr^2$ .

C)  $I_0 = 0.9mr^2$

16) Sylinderens hastighet ved  $t = t_7 = 0.200$  s er omtrent

Hastigheten  $v_7$  kan baseres på forflytningen fra 6 til 7, fra 6 til 8 eller fra 7 til 8. Alle tre gir omtrent samme svar. Så f.eks:  $v_{7x} = (x_8 - x_6)/2\Delta t$ , tilsvarende for  $v_{7y}$ , og  $v_7 = \sqrt{v_{7x}^2 + v_{7y}^2} \simeq 0.50$  m/s.

B) 0.50 m/s

17) Med konstant tidsintervall  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  kan sylinderens akselerasjon  $a_i$  ved tidspunktet  $t_i$  tilnærmes med algoritmen ("oppskriften")

Bare A og B er aktuelle, siden C og D har feil enhet (m/s og ikke m/s<sup>2</sup>). Alternativ B kan umulig gi en akselerasjon, siden de tre involverte posisjonene alle legges sammen. dermed er A eneste mulighet:  $a_i = (v_{i+1/2} - v_{i-1/2})/\Delta t$  og  $v_{i+1/2} = (x_{i+1} - x_i)/\Delta t$  osv gir detaljene.

$$A) a_i = \frac{\sqrt{(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i)^2 + (y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i)^2}}{(\Delta t)^2}$$

18) Hvor, angitt ved vinkelen  $\phi$  i grader, er sylinderen ved  $t = t_{10} = 0.300$  s?

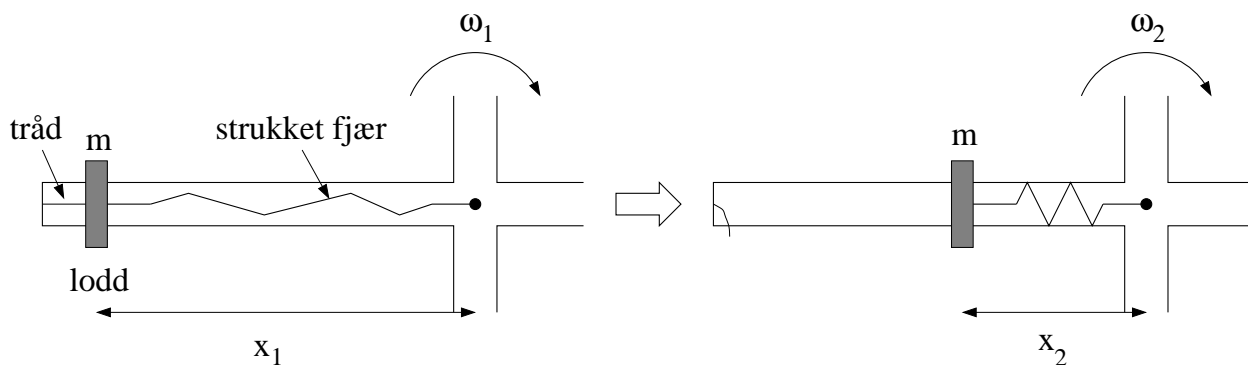
$$\tan \phi_{10} = x_{10}/y_{10} = 261/759 \rightarrow \phi_{10} = 19^\circ.$$

B) 19°

19) Sylinderen ble startet på toppen, ved  $\phi \simeq 0^\circ$  med hastighet  $v \simeq 0$ . Hva er da korrekt kvalitativ beskrivelse av sylindereens bevegelse nedover kvartsirkelen, fra  $y \simeq r + R$  til  $y = 0$ ?

Kun friksjonskraften  $f$  har dreiemoment mhp sylindereens CM. Ren rulling fordrer  $\omega = v/r$ , dvs  $\alpha = a/r$ . Her blir  $a$  stadig større, siden tyngdens komponent langs banen stadig øker, mens normalkraften  $N$  blir stadig mindre, dvs  $f_{\max} = \mu_s N$  blir stadig mindre. Når påkrevd  $f$  blir større enn  $\mu_s N$ , inntreer sluring. Etter hvert blir total kraft normalt underlaget for liten til å tilsvare masse ganget med sentripetalakselerasjon, og sylindereen mister kontakten med underlaget, dvs bevegelsen går over i et skrått kast.

B) Ren rulling etterfulgt av sluring etterfulgt av "skrått kast"-bevegelse.



Figuren over viser den ene av fire like stenger på et roterende aksekorset, sett ovenfra og ned. Aksekorset har treghetsmoment  $I_0$  med hensyn på vertikalaksen gjennom aksekorsets massesenter (markert med en liten svart sirkel). På hver av aksekorsets fire stenger er et lite lodd med masse  $m$  i utgangspunktet festet med en tynn tråd til stangas ytterste ende, samt til ei strukket fjær, som igjen er festet til rotasjonsaksen. (Figuren til venstre.) Tråd og fjær er tilnærmet masseløse. Før trådene kuttes roterer systemet med vinkelhastighet  $\omega_1$ , med de fire loddene i avstand  $x_1$  fra rotasjonsaksen. Når de fire trådene kuttes, trekkes loddene innover av hver sin fjær, til den nye likevektsavstanden  $x_2$  fra rotasjonsaksen. (Figur til høyre.) Systemet roterer nå med vinkelhastighet  $\omega_2$ . Oppgavene 20 og 21 er relatert til dette eksperimentet.

20) Hva er forholdet  $\omega_2/\omega_1$  mellom vinkelhastighetene i slutt-tilstand og start-tilstand?

Dreieimpulsen relativt et punkt på rotasjonsaksen er bevart:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

med  $I_j = I_0 + 4mx_j^2$ . Dermed:

$$C) \omega_2/\omega_1 = I_1/I_2 = (I_0 + 4mx_1^2)/(I_0 + 4mx_2^2)$$


---

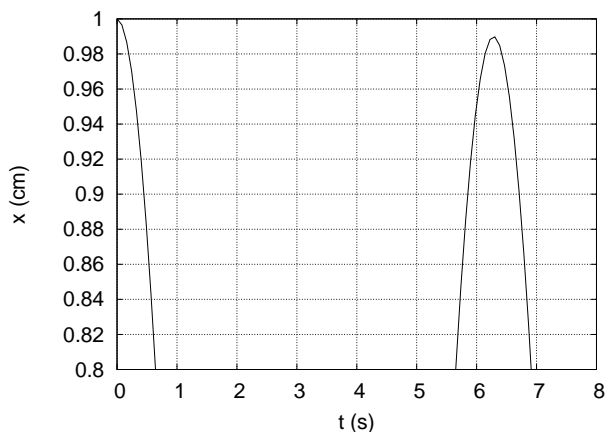
21) Hva er forholdet  $K_2/K_1$  mellom kinetisk rotasjonsenergi i slutt-tilstand og start-tilstand?

Kinetisk rotasjonsenergi er  $K_j = I_j\omega_j^2/2$ , slik at

$$K_2/K_1 = (I_2/I_1) \cdot (\omega_2/\omega_1)^2 = (I_2/I_1) \cdot (I_1/I_2)^2 = I_1/I_2.$$

$$C) K_2/K_1 = (I_0 + 4mx_1^2)/(I_0 + 4mx_2^2)$$


---



22) Et svakt dempet mekanisk svingesystem svinger upåvirket av ytre krefter med et utsving som beskrives av funksjonen

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos \omega t,$$

med  $A = 1.0$  cm. Figuren til venstre viser (deler av)  $x(t)$  de første 8 sekundene av svingeforløpet (der 8 sekunder tilsvarer noe mer enn en hel periode). Dersom dette systemet ble påvirket av en ytre

harmonisk kraft, ville utsvingsamplituden plottet som funksjon av frekvensen  $\Omega$  til den ytre kraften bli en resonanskurve, med maksimal amplitude når  $\Omega \simeq \omega_0$ , der  $\omega_0$  er svingesystemets egenfrekvens. Med svak demping blir resonanstoppen relativt smal, med halvverdibredde  $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ . Med utgangspunkt i figuren over, hvor stor er omtrent resonanskurvens  $Q$ -faktor, definert som  $Q = \omega_0/\Delta\omega$ ?

Fra grafen ser vi at perioden er (ca)  $T = 6.3$  s, slik at  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ . Etter 1 periode er amplituden 0.99. Dermed har vi

$$e^{-\gamma T} = 0.99,$$

dvs

$$\gamma T = -\ln 0.99.$$

Med svak demping er  $\omega_0 \simeq \omega$  slik at

$$Q \simeq \omega/\Delta\omega = (2\pi/T)/(2\gamma) = \pi/\gamma T = -\pi/\ln 0.99 \simeq 313.$$

D) 313

---

23) En personbil med masse 1200 kg kolliderer fullstendig uelastisk med en lastebil som står i ro. (Dvs, bil og lastebil henger sammen etter kollisjonen.) Lastebilen har masse 6000 kg. Hvor stor andel av den kinetiske energien går tapt i denne kollisjonen? (Dvs  $(K_{\text{før}} - K_{\text{etter}})/K_{\text{før}}$ .) Se bort fra friksjonskrefter fra bakken i løpet av kollisjonen.

La  $m$  og  $M$  være massen til hhv bil og lastebil, mens  $v$  og  $v'$  er hhv bilens hastighet før kollisjon og kjøretøyenes felles hastighet etter kollisjon. Vi har impulsbevarelse, slik at

$$mv = (m + M)v' \Rightarrow v' = mv/(m + M).$$

Kinetisk energi før kollisjon:

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Etter kollisjon:

$$K' = \frac{1}{2}(m + M)(v')^2 = \frac{1}{2}mv^2 \frac{m}{m + M}.$$

Dermed:

$$\frac{K - K'}{K} = 1 - K'/K = 1 - m/(m + M) = M/(m + M),$$

dvs 6000/7200, som er ca 0.83.

C) 83%



24) Et sykkelhjul med masse  $M$ , radius  $R$  og treghetsmoment  $I_0 = MR^2$  (mhp akslingen gjennom hjulets massesenter) settes i rask rotasjon med vinkelhastighet  $\omega$ . Det roterende hjulet henges opp i ei snor festet til akslingen i avstand  $r$  fra hjulets massesenter, som vist i figuren over til venstre. Som en følge av tyngdekraftens dreiemoment  $\tau = Mgr$  relativt snoras festepunkt (A) preseserer hjulet (langsomt) om vertikalaksen med vinkelhastighet  $\Omega$ . Hva blir  $\Omega$ ? Tips: Benytt N2 for rotasjon ( $\tau = \Delta L/\Delta t$ , "spinnetsatsen"),  $L = I_0\omega$ , samt figuren over til høyre.

Fra figuren til høyre ser vi at  $\Delta\phi = \Delta L/L$  (vinkel = buelengde dividert med radius). Fra N2 for rotasjon har vi  $\Delta L = \tau\Delta t = Mgr\Delta t$ . Dermed:

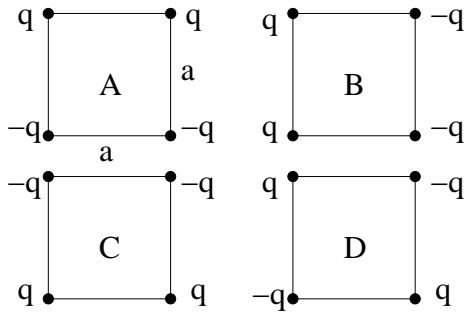
$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{Mgr}{I_0\omega} = \frac{gr}{R^2\omega}.$$

A)  $gr/\omega R^2$

25) En fallskjermhopper utsettes for friksjonskraften (luftmotstanden)  $f = -Dv^2$ , der  $D$  er en konstant. Hopper med fallskjerm har total masse  $m$ , og tyngdens akselerasjon er  $g$ . Hvilken differensialligning bestemmer da fallskjermhopperens hastighet  $v(t)$ ?

N2:  $mg - Dv^2 = ma = m dv/dt$ . Multiplikasjon med  $g dt$  og divisjon med  $mg - Dv^2$  på begge sider gir

$$D) \frac{dv}{1 - Dv^2/mg} = g dt$$



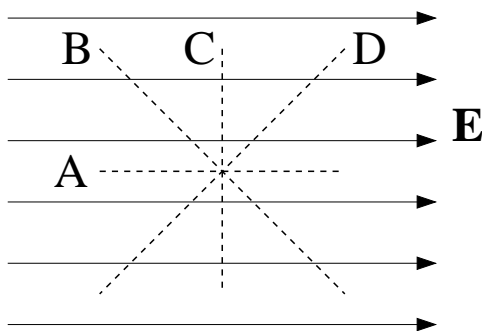
26) Hvilken plassering av to positive punktladninger  $q$  og to negative punktladninger  $-q$  gir minst mulig elektrisk feltstyrke ( $E = |\mathbf{E}|$ ) i midten av kvadratet?

Konfigurasjon D gir  $E = 0$  i midten av kvadratet.

27) Hva er absoluttverdien av det elektriske dipolmomentet til systemet med fire punktladninger i figur D i oppgave 26? Kvadratene har sidekanter  $a$ .

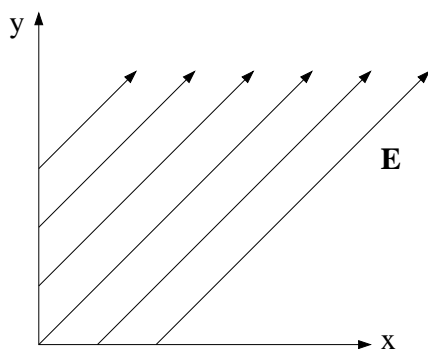
Dette er en sum av to like store men motsatt rettede dipoler, så totalt dipolmoment er null.

D) 0



28) Langs hvilken stiptet linje endrer potensialet seg raskest?

Det elektriske feltet peker i den retningen som potensialet avtar raskest,  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Dermed stiptet linje A.

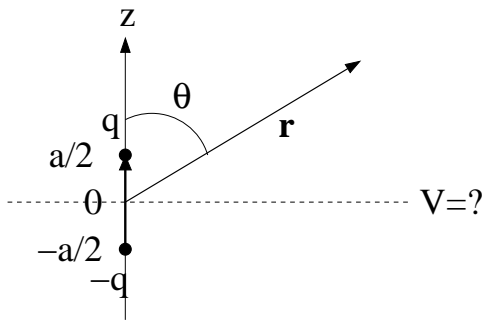


29) Figuren viser feltlinjer for et uniformt elektrisk felt. Hvilken funksjon kan brukes til å beskrive potensialet  $V(x, y)$ ? (Her er  $E_0$  en positiv konstant størrelse.)

Ser fra figuren at  $\mathbf{E} = k(\hat{x} + \hat{y})$ , dvs  $\partial V/\partial x = E_x = -k$  og  $\partial V/\partial y = E_y = -k$ , som gir  $V(x, y) = -k(x + y)$  (eventuelt pluss en konstant).

A)  $V(x, y) = -E_0x - E_0y$





30) Figuren viser en elektrisk dipol med dipolmoment  $\mathbf{p} = qa\hat{z}$ . I stor avstand  $r$  ( $r \gg a$ ) fra dipolen kan potensialet skrives på formen

$$V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

(Her er  $p = |\mathbf{p}|$ .) Hva blir da verdien av  $V$  i  $xy$ -planet?

I  $xy$ -planet er  $\cos \theta = \cos \pi/2 = 0$ , dvs  $V = 0$ .

D)  $V = 0$

31) For samme dipol som i oppgave 30, hva blir potensialet langt ute på den positive  $z$ -aksen?

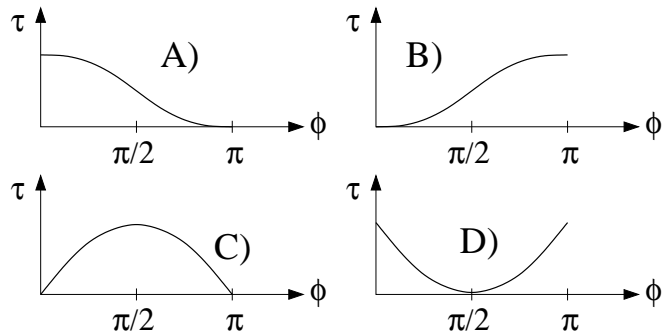
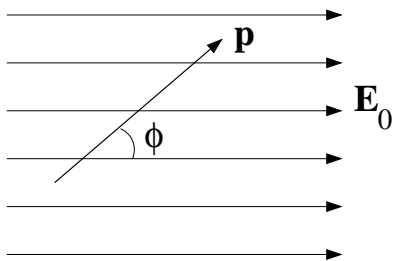
På positiv  $z$ -akse er  $\cos \theta = \cos 0 = 1$  og  $r = z$ , slik at

C)  $V = qa/4\pi\epsilon_0 z^2$

32) For samme dipol som i oppgave 30, med hvilken enhetsvektor og med hvilket fortegn kan vi angi retningen på det elektriske feltet i et punkt i  $xy$ -planet, dvs  $\mathbf{E}(r, \theta) = \mathbf{E}(r, \pi/2)$ ?

Feltet må peke loddrett nedover i et punkt i  $xy$ -planet, dvs  $\mathbf{E} \sim -\hat{z}$ .

C)  $-\hat{z}$

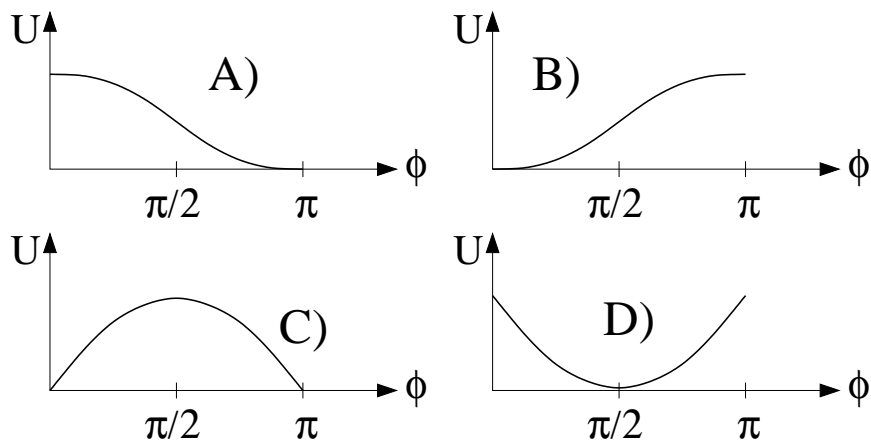


33) Figuren til venstre viser en elektrisk dipol med dipolmoment  $\mathbf{p}$  i et uniformt ytre elektrisk felt  $\mathbf{E}_0$ . Hvilken av figurene til høyre viser da (kvalitativt) absoluttverdien av dreiemomentet som virker på dipolen,  $\tau = |\boldsymbol{\tau}|$ , som funksjon av vinkelen  $\phi$  mellom  $\mathbf{p}$  og  $\mathbf{E}_0$ ?

Med  $\phi = 0$  eller  $\phi = \pi$  vil den elektriske kraften ikke ha noen arm, og dreiemomentet  $\tau = 0$ . Bare figur C) passer med dette. Mer presist:

$$\tau = |\mathbf{p} \times \mathbf{E}_0| = pE_0 |\sin \phi|,$$

og C) er nettopp en sinusfunksjon.

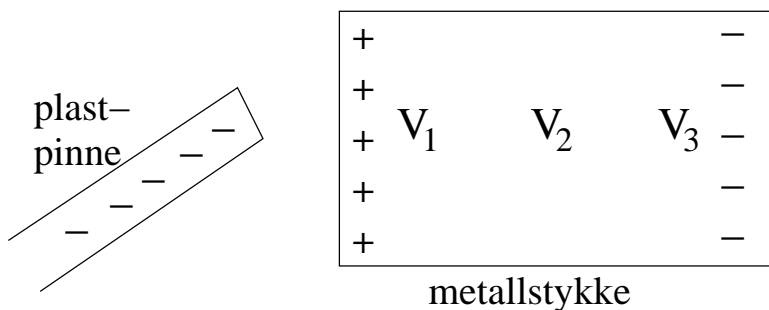


34) Og hvilken av disse figurene viser potensiell energi  $U(\phi)$  for dipolen i oppgave 33?

Siden  $\mathbf{p}$  har retning fra den negative mot den positive ladningen i dipolen, vil  $\phi = 0$  tilsvare et minimum og  $\phi = \pi$  et maksimum i potensiell energi. Figur B) passer med dette. Mer presist:

$$U(\phi) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0 = -pE_0 \cos \phi,$$

og B) er nettopp minus en cosinusfunksjon (eventuelt pluss en konstant, som vi vet ikke har noen fysisk betydning).

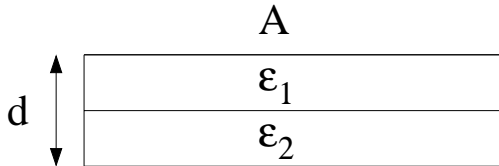


35) En negativt ladet plastpinne holdes i nærheten av et stykke metall (som kan betraktes som en perfekt elektrisk leder).  $V_1$ ,  $V_2$  og  $V_3$  angir potensialet på tre ulike steder på metallstykket, som vist i figuren. Hvordan vil du rangere disse?

Metallstykket er en elektrisk leder, som er et ekvipotensial, dvs

B)  $V_1 = V_2 = V_3$

36) En platekondensator har metallplater med areal  $A = 1 \text{ cm}^2$  og avstand  $d = 2 \text{ mm}$  mellom platene. Volumet mellom platene er fylt med to like tykke dielektriske skiver, som vist i figuren, med permittivitet hhv  $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$  (øverst) og  $\epsilon_2 = 5\epsilon_0$  (nederst). Hva er kondensatorens kapasitans? (Tips: Dette kan betraktes som en seriekobling av to kapasitanser.)



For seriekobling av to kapasitanser (se formelvedlegg):

$$C = (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1},$$

med

$$C_1 = \epsilon_1 A / (d/2) = 8\epsilon_0 A / d$$

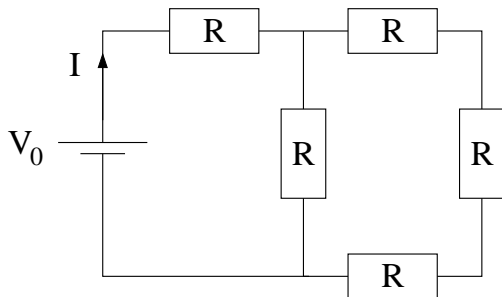
og

$$C_2 = \epsilon_2 A / (d/2) = 10\epsilon_0 A / d.$$

Siden  $\epsilon_0 A / d = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4} / (2 \cdot 10^{-3}) \simeq 0.44 \cdot 10^{-12}$ , dvs 0.44 pF, er det klart at bare A) kan være et aktuelt svaralternativ. Og med  $(1/8 + 1/10)^{-1} = 40/9$ , får vi nettopp ca 2 pF.

A) 2 pF

37) Hva blir strømmen  $I$  i kretsen til venstre?



Kretsen er en seriekobling av  $R$  og parallellkoblingen (de fire lengst til høyre) av  $R$  og  $R + R + R = 3R$ . Kretsens totale ("ekvivalente") resistans blir dermed

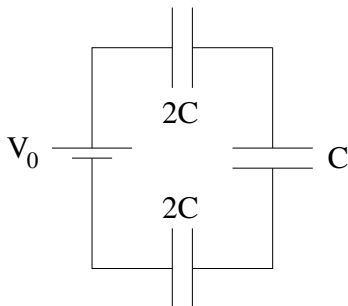
$$R_{\text{tot}} = R + (1/R + 1/3R)^{-1} = R + 3R/4 = 7R/4,$$

og strømmen  $I$  blir

$$I = V_0 / R_{\text{tot}} = 4V_0 / 7R.$$

D)  $4V_0/7R$

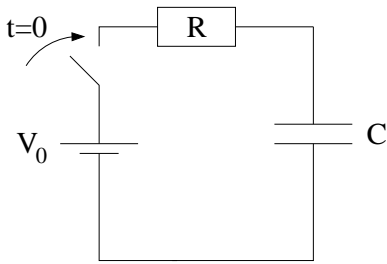
38) Hva blir spenningen over kondensatoren med kapasitans  $C$  i kretsen til venstre?



Siden hver enkelt sammenhengende lederbit er elektrisk nøytral, blir det *lik ladning*  $\pm Q$  på hver av de seriekoblede kapasitansene. Den påtrykte spenningen  $V_0$  fordeler seg med  $Q/2C$  på hver av kapasitansene  $2C$  og med  $Q/C$  på kapasitansen  $C$ . Følgelig blir  $Q = V_0 C / 2$ , og spenningen over  $C$  blir  $V_0 / 2$ .

B)  $V_0/2$

39) En likespenningskilde  $V_0$  kobles til en seriekobling av en motstand  $R = 3 \text{ k}\Omega$  og en kapasitans  $C = 3 \text{ mF}$  ved tidspunktet  $t = 0$ . Vel vitende om Ohms lov,  $V_R = RI$ , velger vi å måle strømstyrken  $I(t)$  i kretsen via spenningen  $V_R(t)$  over motstanden. Siden kondensatoren er uten ladning i utgangspunktet, kan vi fastslå at  $V_R(t)$  blir maksimal umiddelbart etter at spenningskilden er koblet til. Men hvor lang tid vil det ta før  $V_R(t)$  er redusert til 80% av sin maksimale verdi?

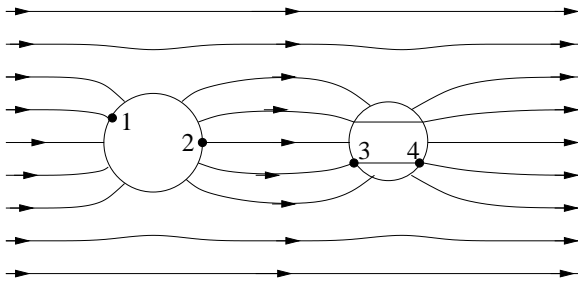


Kretsens tidskonstant er  $\tau = RC = 3000 \cdot 0.003 = 9 \text{ s}$ . Dermed må riktig svar bli C). Mer presist er tidspunktet  $t$  bestemt ved at

$$V_R(t) = V_0 e^{-t/\tau} = 0.80V_0 \Rightarrow t = \tau \ln(1/0.80) = 9 \cdot \ln(5/4) \simeq 2 \text{ s.}$$

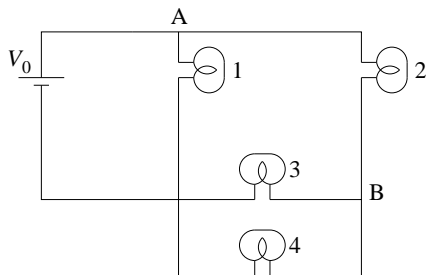
C) Ca 2 s

40) Ei metallkule og ei plastkule (som er et dielektrikum) er plassert mellom to store uniformt men motsatt ladde metallplater. Figuren viser en kvalitativ skisse av det resulterende elektriske feltet omkring de to kulene. Ranger potensialene i de fire avmerkede posisjonene 1 – 4.



Kula til venstre er metallkula, med null elektrisk felt inni kula. Dermed er  $V_1 = V_2$ . Feltet er svekket inni plastkula til høyre, pga innretting av dipoler i det ytre feltet (polarisering), men som vi ser er feltet ikke null inni plastkula. Dermed er  $V_3 > V_4$ .

C)  $V_1 = V_2 > V_3 > V_4$



Lyspærene 1 – 4 i kretsen til venstre kan betraktes som identiske resistanser  $R$ . Økt strøm gjennom ei gitt lyspære resulterer i økt lysstyrke i denne pæra. Skrus ei pære ut, blir det der en åpen krets, dvs det går ingen strøm der. Kortsluttes det mellom to punkter i kretsen, betyr det at punktene forbindes med en perfekt leder uten motstand. Oppgavene 41 – 43 er relatert til denne kretsen.

41) Hva skjer med lysstyrken i pære 3 dersom pære 4 skrus ut?

Vi har i utgangspunktet spenningen  $V_0$  over 2 i serie med (3 og 4 i parallell), som representerer en motstand  $R + (1/R + 1/R)^{-1} = 3R/2$ , og dermed strømmen  $2V_0/3R$ . Halvparten av denne går gjennom 3, dvs  $V_0/3R$ . Med 4 utskrudd ligger spenningen  $V_0$  over 2 i serie med 3, som er en motstand  $R + R = 2R$ , og dermed strømmen  $V_0/2R$ . Hele denne går gjennom 3, og da  $V_0/2R > V_0/3R$  vil 3 lyse sterkere.

B) Lyser sterkere.

42) Hva skjer med lysstyrken i pære 1 dersom vi kortslutter mellom A og B?

Selv om vi forbinder A og B med en motstandsfri leder (dvs kortslutter mellom A og B), vil det både før og etter være en spenning  $V_0$  over pære 1. Strømmen gjennom 1 blir derfor  $V_0/R$  enten vi kortslutter mellom A og B eller ikke.

C) Lyser med uendret styrke.

---

43) Med alle fire lyspærer på plass i kretsen (og uten kortslutning mellom A og B), hva blir totalt effekttap i kretsen dersom  $V_0 = 12$  V og  $R = 5$   $\Omega$ ?

Kretsens totale motstand (1 i parallell med en seriekobling av 2 og (3 og 4 i parallell)):

$$R_{\text{tot}} = (1/R + 2/3R)^{-1} = 3R/5.$$

Total strøm levert av spenningskilden er

$$I = V_0/R_{\text{tot}} = 5V_0/3R.$$

Effekttapet i kretsen:

$$P = V_0I = 5V_0^2/3R = 5 \cdot 144/3 \cdot 5 = 48 \text{ W}.$$

A) 48 W

---

44) Ved hjelp av et "krysset" elektrisk og magnetisk felt har du klart å plukke ut ioner med ladning  $e$  (dvs underskudd på et elektron) og hastighet 400 m/s. Disse ionene sendes inn i et område med uniform magnetfeltstyrke på 0.045 T, på en slik måte at ionenes hastighet hele tiden står normalt på magnetfeltets retning. Ionene avbøyes og følger en sirkulær bane, og du måler banens radius til 7.5 mm. Hva slags ioner er dette? ( $1u \simeq 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg)

Den magnetiske kraften  $qvB$  forårsaker sirkelbevegelse med radius  $r$ , og dermed sentripetalakselerasjon  $v^2/r$ , dvs  $qvB = mv^2/r$ , som gir  $m = qBr/v = eBr/v$  når partiklenes ladning er  $e$ . Innsetting av tallverdier gir

$$m = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.045 \cdot 0.0075/400 = 1.35 \cdot 10^{-25} \text{ kg},$$

som tilsvarende  $N = m/u \simeq 81$  nukleoner (kjernepartikler), dvs bromioner.

D) Bromioner med atommasse  $81u$

---

45) En sylinder har radius 2 cm, lengde 10 cm og uniform magnetisering (dvs magnetisk dipolmoment pr volumenhet) 50 A/m, med  $\mathbf{M}$  rettet langs sylinderens symmetriakse. Hva er da total indusert magnetiseringsstrøm  $I_m$  i sylinderens overflate?

Med overflatestrøm  $I_m$  omkring arealet  $A$  er sylindren en magnetisk dipol med dipolmoment  $m = I_m A$ . Siden magnetisering er magnetisk dipolmoment pr volumenhet, kan vi også skrive  $m = MV = MA l$ . Dermed er  $I_m = Ml = 50 \cdot 0.10 = 5.0$  A.

B) 5.0 A

---

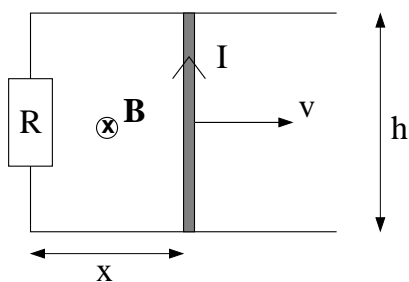
46) Dersom magnetiseringen  $\mathbf{M}$  i oppgave 45 er forårsaket av et ytre magnetfelt  $\mathbf{B}_0 = 1.0$  T (med samme retning som  $\mathbf{M}$ ), hva er da sylinderens magnetiske susceptibilitet  $\chi_m$ ? (Oppgitt:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M}$ ,

$$\mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B} \chi_m / (1 + \chi_m)$$

Her er  $B_0 = 1.0 \text{ T}$  mens  $\mu_0 M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \simeq 6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ , slik at  $B \simeq B_0$ , og dermed er  $\mu_0 M \simeq B_0 \chi_m / (1 + \chi_m) \simeq B_0 \chi_m$ , som gir  $\chi_m \simeq \mu_0 M / B_0 \simeq 6 \cdot 10^{-5}$ .

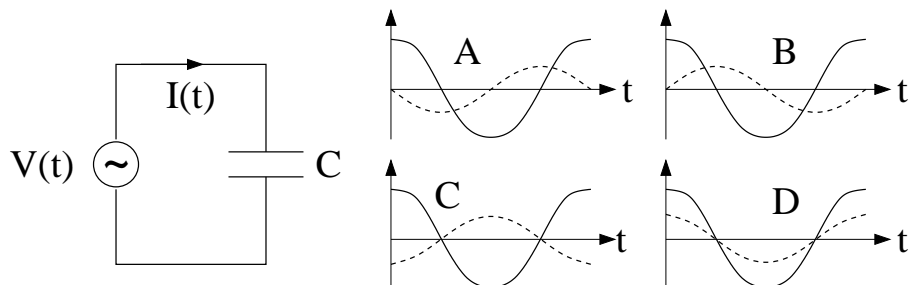
D)  $6.3 \cdot 10^{-5}$

47) I figuren til venstre lukkes den elektriske kretsen ved hjelp av en rett elektrisk leder med lengde  $h$ . Kretsen har resistans  $R$ . Et uniformt magnetfelt  $\mathbf{B}$  har retning inn i planet. Dermed induseres det en spenning  $\Delta V$  i kretsen når den rette lederen trekkes mot høyre med hastighet  $v$ , i henhold til Faradays induksjonslov. På den induserte strømmen  $I$  i den rette lederen virker det dermed en bremsende magnetisk kraft (mot venstre i figuren). Denne magnetiske kraften må balanseres med en trekk-kraft mot høyre, dersom den rette lederen skal bevege seg med konstant hastighet  $v$  (jf Newtons 1. lov). Hvor stor er denne kraften?



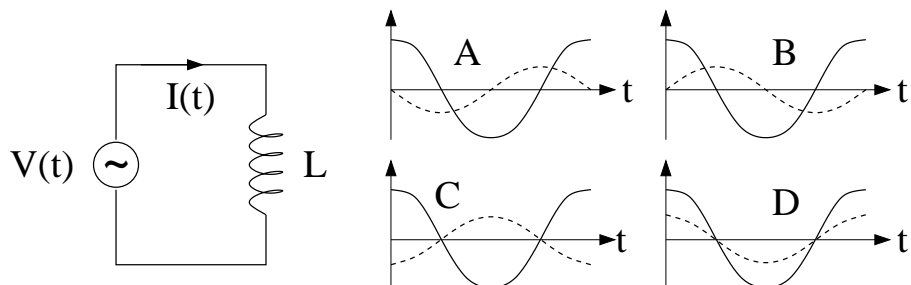
Indusert spenning:  $\Delta V = d\phi/dt = BdA/dt = Bhv$ . Gir induisert strøm  $I = \Delta V/R = Bhv/R$ , og dermed magnetisk kraft  $F = IhB = B^2 h^2 v/R$ .

A)  $B^2 h^2 v/R$



48) En vekselspenning  $V(t) = V_0 \cos \omega t$  er koblet til en kapasitans  $C$ . Hvilken graf viser korrekt sammenheng mellom  $V(t)$  (heltrukket linje) og resulterende strøm  $I(t) = dQ(t)/dt$  (stiplet linje) i kretsen?

Kirchhoffs spenningsregel (K2) gir  $V_0 \cos \omega t = Q/C$ , og dermed  $I(t) = dQ/dt = -V_0 \omega C \sin \omega t$ . Stiplet linje i A) er  $-\sin \omega t$ .

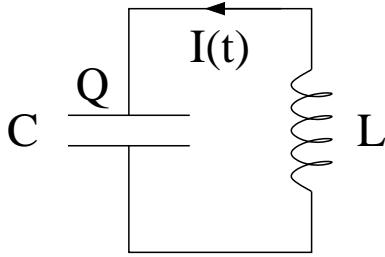


49) En vekselspenning  $V(t) = V_0 \cos \omega t$  er koblet til en induktans  $L$ . Hvilken graf viser korrekt sammenheng mellom  $V(t)$  (heltrukket linje) og resulterende strøm  $I(t)$  (stiplet linje) i kretsen?

K2 gir  $V_0 \cos \omega t = L dI/dt$ , som betyr at vi må ha  $I(t) = (V_0/\omega L) \sin \omega t$ . Stiplet linje i B er  $\sin \omega t$ .

50) Strømmen i  $LC$ -kretsen til venstre bestemmes av Kirchhoffs spenningsregel,

$$-LdI/dt - Q/C = 0.$$



Hva blir perioden  $T$  for harmonisk svingning av  $I$  og  $Q$  i denne kretsen dersom  $L = 5$  mH og  $C = 5$  mF?

K2 gir  $-LdI/dt - Q/C = 0$ , som med  $I = dQ/dt$  gir  $d^2Q/dt^2 + Q/LC = 0$ . Dette er ligningen for en enkel (udempet) harmonisk oscillator med vinkelfrekvens  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , dvs periode  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \simeq 31.4 \cdot 10^{-3}$  s = 31.4 ms.

C) 31.4 ms