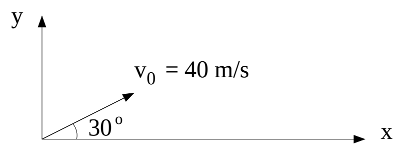
---

1) Med moderne nanoteknologi er det mulig å lage svært små partikler. Hva er massen til kuleformede sølvpartikler med diameter 60 nm? Sølv har massetetthet ca 10.5 g/cm^3.

A) 1.2 fg

$$m = \rho V = \rho \cdot \pi d^3/6 = 10.5 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (60 \cdot 10^{-9})^3/6 = 1.2 \cdot 10^{-18} \text{ kg},$$

dvs 1.2 fg (femtogram).



2) En kanon skyter ut ei metallkule fra bakkenivå ($y_0 = 0$) med starthastighet 40 m/s og med utgangsretning 30° over horisontalretningen. Hvor lenge er kula i lufta før den lander (i samme høyde som den ble skutt ut)? Se bort fra luftmotstand.

D) 4.1 s

Vi har $y(t) = v_0 t \sin\theta + at^2/2$, som med $y = 0$, $v_0 = 40$ m/s, $a = -g = -9.81$ m/s^2 og $\theta = 30°$ gir (i tillegg til starttidspunktet $t = 0$)

$$t = v_0/g = 40/9.81 = 4.1 \text{ s}.$$

Den gamle professor er ikke lenger i sin beste form, men vil likevel prøve å løpe 400 m. Professorens hastighet $v(t)$ kan med brukbar tilnærmelse beskrives med funksjonen

$$v(t) = \frac{v_0 t}{\tau} e^{-t/\tau},$$

med $v_0 = 20$ m/s og $\tau = 15$ s. Oppgavene 3 – 5 dreier seg om professorens firehundremeterløp.

3) Hva var professorens maksimale hastighet underveis?

D) 7.4 m/s

Hastigheten øker lineært helt i starten, men går så etter hvert mot null pga eksponentialfunksjonen. Det betyr at hastigheten må ha en maksimalverdi underveis, fastlagt ved at $dv/dt = 0$:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

som blir null når $t = \tau$, slik at $v_{\max} = v_0/e = 20/2.718 = 7.4$ m/s.

4) Hva var professorens maksimale akselerasjon underveis?

D) 1.3 m/s^2

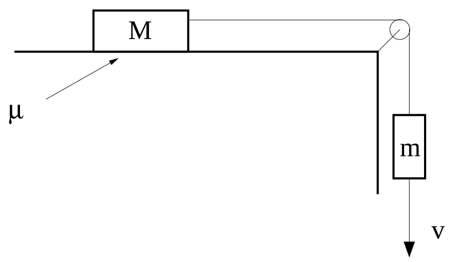
Vi har allerede regnet ut a i forrige oppgave, og vi ser uten videre at a er størst for $t = 0$: $a_{\max} = v_0/\tau = 20/15 = 1.3$ m/s^2.

---

5) Hvordan endte løpet?

A) Professoren måtte gi seg etter ca 300 m.

$$x = \int_0^\infty v(t)dt = \ldots = v_0\tau = 300 \text{ m}.$$



6) En masse M ligger på et bord og er via ei tilnærmet masseløs snor og friksjonsfri trinse bundet sammen med en masse m. Koeffisienter for statisk og kinetisk friksjon mellom M og bordet er μ. Hva er μ hvis de to massene beveger seg med konstant hastighet v?

E) $\mu = m/M$

Netto ytre kraft på de to massene er $mg - \mu Mg$, der vi har brukt at friksjonskraften på M er $f = \mu N = \mu Mg$. N2 gir dermed $mg - \mu Mg = (m + M)a$. Konstant hastighet betyr $a = 0$, dvs $\mu = m/M$.

---

7) Hva er snordraget i forrige oppgave hvis de to massene beveger seg med konstant hastighet v?

A) mg

Nettokraft på m er $mg - S$, og hvis m beveger seg med konstant hastighet, betyr det at $S = mg$.

---

8) Ei vogn glir friksjonsfritt på ei skinne og kolliderer fullstendig uelastisk med ei identisk vogn som står i ro før kollisjonen. Etter kollisjonen henger de to vognene sammen. Hvor mange prosent av systemets opprinnelige kinetiske energi gikk tapt i kollisjonen?

C) 50%

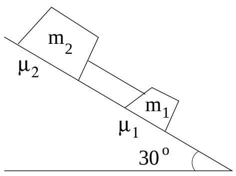
Impulsbevarelse gir slutthastighet $v_1 = v_0/2$, der v_0 er hastigheten til den ene vogna før kollisjonen. Da er kinetisk energi før kollisjonen lik $mv_0^2/2$ mens den etter kollisjonen er $2m(v_0/2)^2/2 = mv_0^2/4$. Altså har halvparten gått tapt i kollisjonen.

---

9) Ei kule med masse 165 g og diameter 60.0 mm slippes fra toppen av Eiffeltårnet og oppnår maksimal hastighet (terminalhastighet) før den treffer bakken. Luftmotstanden er på formen $-Dv^2$ med $D = 0.715$ g/m. Hvor stor er terminalhastigheten?

C) 47.6 m/s

Vi setter $mg = Dv^2$ og finner terminalhastighet $v = \sqrt{mg/D} = \sqrt{0.165 \cdot 9.81/0.000715} = 47.6$ m/s.



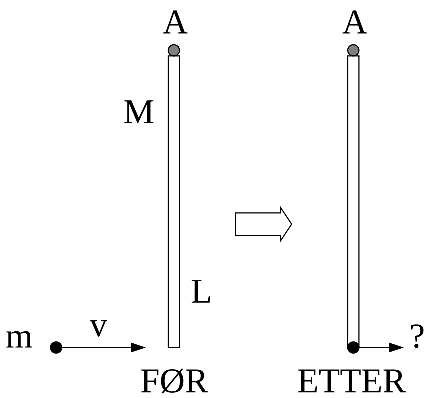
10) To klosser ligger på et skråplan med helningsvinkel 30° og er forbundet med ei stiv og tilnærmet masseløs stang. Klossene har masse hhv $m_1 = 0.12$ kg og $m_2 = 0.16$ kg. Kinetiske friksjonskoeffisienter er hhv $\mu_1 = 0.20$ og $\mu_2 = 0.15$ (se figur). Hva blir klossenes akselerasjon?

E) 3.4 m/s^2

Nettokraften på de to klossene (parallelt med skråplanet) er totaltyngdens parallellkomponent minus total friksjonskraft. N2 gir da

$$a = g\frac{(m_1 + m_2)\sin\theta - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\theta}{m_1 + m_2},$$

som med tallverdier innsatt gir $a = 3.4$ m/s^2.



11) Ei tynn, jevntjukk stang har lengde $L = 1.0$ m og masse $M = 150$ g, og henger vertikalt i tyngdefeltet. Stanga kan svinge friksjonsfritt om en aksling i enden (A). Et lite prosjektil med masse $m = 10$ g skytes horisontalt med hastighet $v = 180$ m/s og treffer stanga helt nederst i en fullstendig uelastisk kollisjon. (Dvs prosjektilet sitter fast i stanga.) Hva blir hastigheten til det lille prosjektilet (og enden av stanga) umiddelbart etter kollisjonen? (Tips: Dreieimpulsbevarelse.)

B) 30 m/s

$mvL = I_A\omega = (ML^2/3+mL^2)\cdot v_{\text{etter}}/L$, dvs $v_{\text{etter}} = v\cdot m/(M/3+m) = v/(M/3m+1) = 180/6 = 30$ m/s.

---

12) I forrige oppgave, hvordan og hvorfor endres den totale impulsen til systemet (stav og prosjektil) i løpet av kollisjonen mellom prosjektil og stav?

E) Øker pga kraften fra akslingen.

Uten akslingen til stede i kollisjonen ville øvre ende av stanga bevege seg mot venstre. Akslingen hindrer dette med en "rekylkraft" mot høyre. Dette er en ytre kraft på systemet. Følgelig økt impuls.

---

13) Anta nå at stanga med prosjektilet i forrige oppgave svinger harmonisk fram og tilbake med små utsving omkring likevekt. Hva er egenfrekvensen f for denne fysiske pendelen?

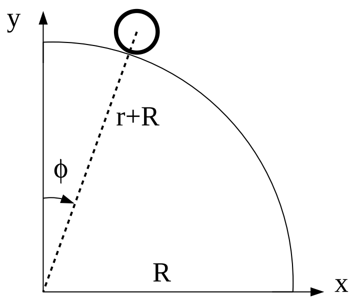
C) 0.59 Hz

$f = \omega/2\pi = \sqrt{(m+M)gd/I_A}/2\pi$. Her er d avstanden fra akslingen til systemets massesenter:

$$d = \frac{ML/2 + mL}{M+m} = 85L/160 = 85/160 \text{ m}.$$

Og $I_A = ML^2/3 + mL^2$. Dette gir egenfrekvens $f = 0.59$ Hz.

Tabellen til høyre viser posisjon (x, y), målt i enheten millimeter (mm), og tid t, målt i enheten millisekunder (ms), for massesenteret til en hul messingsylinder med masse $m = 89$ g, ytre radius $r = 19$ mm og indre radius 17 mm, som ruller på utsiden av en kvartsirkel med radius $R = 784$ mm. Oppgavene 14 – 17 er knyttet til denne figuren og tabellen.



14) Messingsylinderens treghetsmoment med hensyn på symmetriaksen gjennom dens massesenter (normalt på papirplanet i figuren) er omtrent

A) $0.9mr^2$

Treghetsmomentet må være større enn $m \cdot (17r/19)^2 = 0.8mr^2$, og da er bare A et mulig riktig svar.

15) Sylinderens akselerasjon i x-retning ved $t = 1101$ ms (basert på tallene i tabellen) er omtrent

A) 1.1 m/s^2

$$
\begin{aligned}
a_x(t) &\simeq \frac{v_x(t+\Delta t/2) - v_x(t-\Delta t/2)}{\Delta t} \\
&\simeq \frac{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} - \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} \\
&= \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \\
&= \frac{176.15 - 2\cdot 163.14 + 151.28}{33^2}\ \mathrm{mm/(ms)}^2 \\
&\simeq 1.1\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm/(ms)}^2 = 1.1\ \mathrm{m/s}^2.
\end{aligned}
$$

t (ms)	x (mm)	y (mm)
1001	130.48	792.44
1034	140.32	790.80
1068	151.28	788.66
1101	163.14	786.32
1134	176.15	783.41
1168	190.13	779.55
1201	205.68	775.52
1235	222.44	770.70
1268	240.99	765.51
1301	260.57	758.59
1335	281.59	751.33
1368	304.59	742.06
1401	329.67	731.31
1435	356.68	718.06
1468	385.48	702.88
1502	417.50	685.07
1535	451.85	662.80
1568	487.60	635.93
1602	526.59	604.93
1635	567.59	565.93
1668	609.84	518.69
1702	653.46	462.80
1735	697.27	398.04
1768	740.41	319.27
1802	785.42	231.13
1835	830.43	131.73

16) Hvor, angitt ved vinkelen ϕ i grader, er sylinderen ved $t = 1735$ ms?

A) 60°

$$\phi = \arctan(697.27/398.04) = 60^\circ$$

17) Hvordan vil du best beskrive sylinderens bevegelse ved $t = 1835$ ms?

B) Fritt fall.

Ved tidspunktet 1835 ms er avstanden fra origo til sylinderens massesenter

$$R_{\mathrm{CM}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{830.43^2 + 131.73^2} = 841 \text{ mm},$$

som er betydelig mer enn ca 803 mm ved ren rulling eller sluring. Sylinderen er i fritt fall.

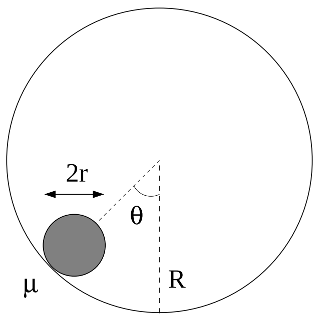
---

18) De to stjernene Sirius A og Sirius B har masse hhv $4.017 \cdot 10^{30}$ kg og $1.945 \cdot 10^{30}$ kg. Anta at avstanden mellom de to stjernenes massesenter er $1.496 \cdot 10^{12}$ m. En liten asteroide befinner seg på forbindelseslinjen mellom de to stjernene, i avstand $2.992 \cdot 10^{11}$ m fra massesenteret til Sirius A. Hva er tyngdens akselerasjon i denne posisjonen, som følge av gravitasjonskraften fra de to stjernene?

A) 2.9 mm/s^2

Tyngdens akselerasjon i den angitte posisjonen er

$$\begin{aligned} g &= G\left(\frac{M_A}{r_A^2} - \frac{M_B}{r_B^2}\right) \\ &= 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{4.017 \cdot 10^{30}}{(2.992 \cdot 10^{11})^2} - \frac{1.945 \cdot 10^{30}}{(1.496 \cdot 10^{12} - 2.992 \cdot 10^{11})^2}\right) \\ &= 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 2.9 \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$



19) Ei kompakt kule med masse m og radius $r = 12.0$ cm befinner seg på innsiden av et kuleskall med radius $R = 54.0$ cm. Anta først at kula kan gli uten friksjon ($\mu = 0$). Hvor stor fart må kula ha ved bunnen ($\theta = 0$) for å nå toppen ($\theta = \pi$) uten å miste kontakten med underlaget?

E) 4.54 m/s

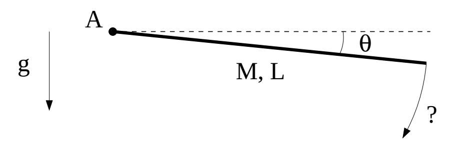
Kula mister kontakten med underlaget akkurat når normalkraften forsvinner, $N = 0$. Da er det bare tyngden mg som sørger for at kula har sentripetalakselerasjon $v^2/(R-r)$ rettet inn mot kuleskallets sentrum. Påkrevd fart på toppen er derfor $v = \sqrt{g(R-r)}$. Mekanisk energi ved bunnen er $mv_0^2/2$, på toppen $mv^2/2 + 2mg(R-r)$. Her er mekanisk energi bevart, slik at $v_0^2 = v^2 + 4g(R-r)$. Vi setter inn påkrevd minstefart $v^2 = g(R-r)$ og får $v_0 = \sqrt{5g(R-r)} = 4.54$ m/s.

---

20) Anta deretter at det er tilstrekkelig friksjon mellom kule og underlag til at kula kan rulle uten å gli på innsiden av kuleskallet. Kula passerer bunnen av banen med hastighet 275 cm/s. Hva er kulas hastighet ved $\theta = \pi/2$?

E) 129 cm/s

Med ren rulling er kulas kinetiske energi $K = mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = 7mv^2/10$ siden $I_0 = 2mr^2/5$ og $\omega = v/r$. Bevaring av mekanisk energi gir $7mv_0^2/10 = 7mv^2/10 + mg(R-r)$, dvs $v = \sqrt{v_0^2 - 10g(R-r)/7} = \sqrt{275^2 - 10 \cdot 981 \cdot 42.0/7} = 129$ cm/s.



21) Ei jevntjukk stang har lengde $L = 100$ cm og masse $M = 800$ g. Stanga slippes fra sin horisontale orientering ($\theta = 0$) og roterer deretter friksjonsfritt omkring aksen A i enden av stanga. I begynnelsen ($\theta \ll 1$) roterer stanga med tilnærmet konstant vinkelakselerasjon $\ddot{\theta}$. Hvor stor er denne konstante vinkelakselerasjonen helt i starten?

C) 14.7 s^{-2}

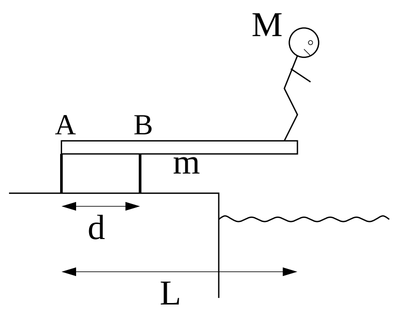
Tyngdekraften Mg angriper i stangas massesenter, midt på, dvs i avstand $L/2$ fra A. Tyngdens dreiemoment om A helt i starten er dermed $\tau_A = MgL/2$. Stangas treghetsmoment mhp rotasjonsaksen A er (med formelvedlegg og Steiners sats) $I_A = ML^2/3$. N2 for rotasjon om A, $\tau_A = I_A\ddot{\theta}$, gir da $\ddot{\theta} = 3g/2L = 3 \cdot 9.81/2.00 = 14.7\ \mathrm{s}^{-2}$.

---

22) Hva er stangas vinkelhastighet ved $\theta = \pi/2$? (Tips: Energibevarelse.)

C) 5.42 s^{-1}

Stangas massesenter har nå falt $L/2$ i tyngdefeltet. Tapt potensiell energi, $MgL/2$, tilsvarer oppnådd kinetisk energi, $I_A\omega^2/2 = ML^2\omega^2/6$, slik at $\omega = \sqrt{3g/L} = \sqrt{3 \cdot 9.81/1.00} = 5.42\ \mathrm{s}^{-1}$.



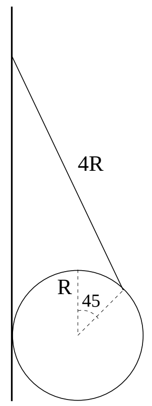
23) En stuper med masse $M = 75$ kg står helt ytterst på et stupebrett med lengde $L = 3.0$ m og (jevnt fordelt) masse $m = 35$ kg. Stupebrettet er festet til to stolper A og B, som vist i figuren. Avstanden mellom A og B er $d = 1.0$ m. Hva er kraften på stupebrettet fra stolpen A?

E) 1.6 kN

Her kan vi bruke statisk rotasjonslikevekt om B,

$$F_A \cdot d = mg(L/2 - d) + Mg(L - d),$$

som med $d = L/3$ gir $F_A = mg/2 + 2Mg = 167.5 \cdot 9.81 = 1643$ N, dvs 1.6 kN.



24) En ball med radius R henger mot en vertikal vegg. Ei snor med lengde $4R$ er festet til veggen og ballen som vist i figuren. Hvor stor må den statiske friksjonskoeffisienten minst være for at ballen skal kunne henge med snorfestet i posisjon som i figuren?

E) 2.2

Her må vi kombinere statisk translasjonslikevekt horisontalt og vertikalt med rotasjonslikevekt om (for eksempel) snoras festepunkt på ballen (A) Vi har behov for snordragets komponenter horisontalt og vertikalt. Anta at snora danner vinkelen β med horisontalen:

$$S_h = S\cos\beta \quad , \quad S_v = S\sin\beta.$$

Avstanden fra veggen til snoras festepunkt på ballen er $(1 + 1/\sqrt{2})R$, slik at $\cos\beta = 1/4 + 1/4\sqrt{2} \simeq 0.4268$ og $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} \simeq 0.9044$. Dessuten lar vi N angi normalkraften fra veggen på ballen (rettet mot høyre) og $f = \mu N$ maksimal friksjonskraft fra veggen på ballen (rettet oppover).
N1 vertikalt: $Mg = \mu N + S\sin\beta$
N1 horisontalt: $N = S\cos\beta$
N1 rotasjon om A: $\mu N \cdot (1 + 1/\sqrt{2})R = NR/\sqrt{2} + MgR/\sqrt{2}$
Kombinasjon av de to første gir $Mg = N(\mu + \tan\beta)$, som innsatt i tredje ligning gir

$$\mu N \cdot (1 + 1/\sqrt{2}) = N/\sqrt{2} + N(\mu + \tan\beta)/\sqrt{2},$$

dvs $\mu = (1 + \tan\beta)/\sqrt{2} \simeq (1 + 0.9044/0.4268)/\sqrt{2} = 2.2$.

---

25) En rakett med brutto startmasse $m_0 = 500$ kg skytes opp fra bakkenivå ved tidspunktet $t = 0$. Det forbrennes 5.00 kg drivstoff pr sekund ($\beta = dm/dt = -5.00$ kg/s), og eksosen sendes ut av raketten loddrett nedover, med en hastighet $u = -3.00$ km/s relativt raketten. (Positiv retning regnes loddrett oppover.) Rakettens hastighet etter en tid t er da

$$v(t) = -u \ln \frac{m_0}{m_0 + \beta t} - gt,$$

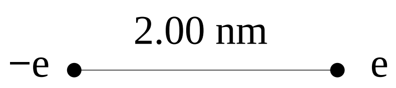
der g er tyngdens akselerasjon. Hva er rakettens akselerasjon 15 sekunder etter oppskyting (dvs ved $t = 15$ s)?

B) 25.5 m/s^2

Raketten har akselerasjonen

$$a(t) = dv/dt = \frac{u\beta}{m_0 + \beta t} - g,$$

som ved $t = 15$ s har verdien $15000/(500 - 75) - 9.81 = 25.5$ m/s^2. Pga stadig redusert masse blir akselerasjonen større og større. (Ved $t = 0$ er $a = 20.2$ m/s^2.)



26) En elektrisk dipol består av to punktladninger $\pm e$ i innbyrdes avstand 2.00 nm. Hva er da elektrisk feltstyrke $|\boldsymbol{E}|$ i avstand henholdsvis 0.50 nm og 1.50 nm fra hver av de to punktladningene?

D) 6.4 GV/m

Den angitte posisjonen befinner seg på linjen mellom de to punktladningene, som da bidrar til totalt elektrisk felt i samme retning, mot venstre:

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1}{(0.5 \cdot 10^{-9})^2} + \frac{1}{(1.5 \cdot 10^{-9})^2}\right) = 6.4 \cdot 10^9 \text{ V/m},$$

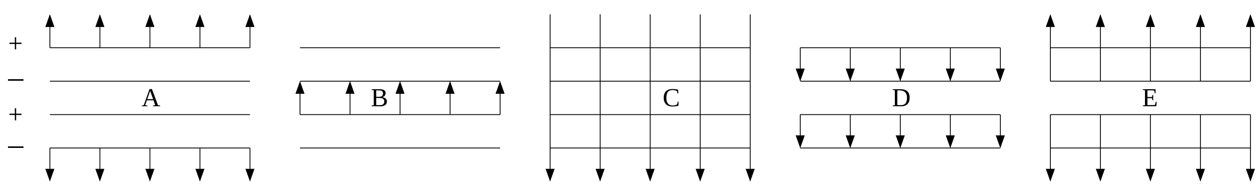
som er det samme som 6.4 GV/m.

---

27) Den elektriske feltstyrken på aksen til dipolen i forrige oppgave, i avstand 0.25 μm fra dipolen, er 370 V/m. Hva er da feltstyrken i avstand 0.75 μm fra dipolen (fortsatt på dipolens akse)?

E) 14 V/m

I stor avstand fra en elektrisk dipol avtar feltstyrken med avstanden opphøyd i tredje potens. Her tredobles avstanden, slik at feltstyrken avtar med en faktor 27, fra 370 til 14 V/m. (Innsetting av tallverdier, hhv 749 og 751 nm som avstand til de to punktladningene, gir samme svar.)



28) Fire svært store parallelle plan, vekselvis med positiv og negativ uniform ladning $\pm\sigma$ pr flateenhet, er plassert med fast innbyrdes avstand (se figur). Hvilken figur viser elektriske feltlinjer for dette systemet? (Tips: Superposisjonsprinsippet.)

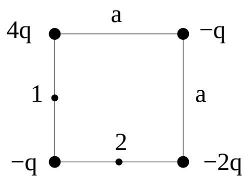
Det enkleste er å betrakte dette som to identiske parallellplatekondensatorer, begge med plateladning $\pm\sigma$ pr flateenhet. Da vet vi at hver av dem har et uniformt elektrisk felt mellom platene, rettet fra positiv mot negativ plate. Følgelig er D korrekt figur.

29) En platekondensator har kapasitans 275 nF. Hvor stort arbeid skal til for å øke spenningen mellom kondensatorplatene fra null til 275 V?

B) 10 mJ

$$W = \int_0^Q q dv = \int_0^Q q dq/C = Q^2/2C = CV^2/2 = 275 \cdot 10^{-9} \cdot 275^2/2 = 0.010 \text{ J} = 10 \text{ mJ}.$$

Oppgavene 30 – 33 er knyttet til følgende system:



30) Fire punktladninger er plassert som i figuren (en i hvert av kvadratets hjørner). Hva er systemets potensielle energi? Oppgitt: $U = \sum_{i<j} q_i q_j / 4\pi\varepsilon_0 r_{ij}$.

B) $-(4 + 7/\sqrt{2})q^2/4\pi\varepsilon_0 a$

Hvert bidrag til total U inneholder faktoren $q^2/4\pi\varepsilon_0 a$. Dessuten, fra de 6 ladningsparene: $-4 - 4 + 2 + 2 + 1/\sqrt{2} - 8/\sqrt{2} = -4 - 7/\sqrt{2}$.

---

31) Hva er dipolmomentet til systemet i forrige oppgave?

E) $3\sqrt{2}qa$

Systemet kan betraktes som en sum av en vertikal dipol med dipolmoment qa (oppover), en horisontal dipol med dipolmoment qa (mot venstre), og en med dipolmoment $2q \cdot \sqrt{2}a$ (rettet 45° på skrå oppover mot venstre). Vektorsummen av den vertikale og den horisontale blir en dipol rettet 45° oppover mot venstre, med absoluttverdi $2qa \cos 45° = \sqrt{2}qa$. Totalt dipolmoment er derfor $3\sqrt{2}qa$ (med retning 45° oppover mot venstre).

---

32) I oppgave 30, hva er nettokraften på punktladningen $-2q$ fra de tre andre?

A)$(1 - 1/\sqrt{2})q^2/\pi\varepsilon_0 a^2$

Summen av kreftene fra de to ladningene $-q$ har retning 45° nedover mot høyre, med absoluttverdi $2 \cdot (2q^2/4\pi\varepsilon_0 a^2) \cdot (1/\sqrt{2})$. Kraften fra ladningen $4q$ er rettet 45° oppover mot venstre, med absoluttverdi $8q^2/4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2$. Nettokraften blir differansen mellom disse bidragene:

$$F = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{8}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

---

33) I oppgave 30, hva er potensialforskjellen mellom de to punktene merket med 1 og 2 i figuren?

B)$(1-1/\sqrt{5})3q/\pi\varepsilon_0 a$

I punktene 1 og 2 er potensialbidraget fra de to ladningene $-q$ like store, siden avstanden fra en gitt ladning er like stor til posisjon 1 som til posisjon 2. Disse to ladningene bidrar derfor ikke til noen potensialforskjell mellom 1 og 2, og vi kan se bort fra disse.
Avstanden fra de to andre ladningene er enten $a/2$ eller $\sqrt{5}a/2$. Dermed:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{4}{1/2} - \frac{2}{\sqrt{5}/2} - \frac{4}{\sqrt{5}/2} + \frac{2}{1/2}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(12 - 12/\sqrt{5}\right) \\ &= \frac{3q}{\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - 1/\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

---

34) Potensialet i xy-planet er

$$V(x,y) = -V_0\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right).$$

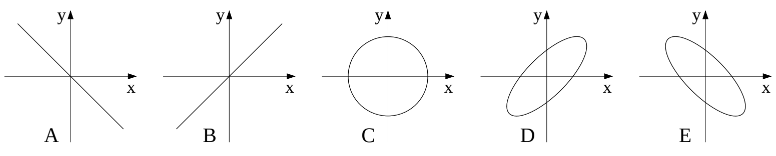
Her er V_0 og a konstanter med enhet hhv V og m. Hva er det elektriske feltet i punktet $(x,y) = (2a,a)$?

C) $(4V_0/a)\hat{x} + (2V_0/a)\hat{y}$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 2V_0 x/a^2 \quad , E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 2V_0 y/a^2.$$

Med $x = 2a$ og $y = a$ blir

$$\boldsymbol{E} = (4V_0/a)\hat{x} + (2V_0/a)\hat{y}.$$



35) Et elektron (ladning $-e$, masse m_e) befinner seg i et todimensjonalt potensial

$$V(x,y) = -V_0\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right).$$

Her er $V_0 = 45$ mV og $a = 45$ nm. Med passende startbetingelser vil elektronet følge en bane gitt ved

$$x(t) = A\sin\omega_0 t \quad , \quad y(t) = A\cos\omega_0 t.$$

Hvilken figur viser denne banen?

Dette er en sirkelbane med radius A; figur C er riktig.

36) Anta at elektronet i forrige oppgave har hastighet $\dot{x}(0) = 5.3 \cdot 10^6$ m/s ved $t = 0$. ($\dot{y}(0) = 0$) Hva er da verdien av A i uttrykket for banen gitt i forrige oppgave?

D) 1.9 μm

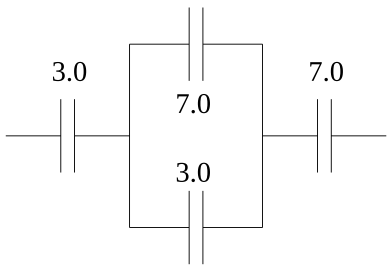
Vi har $dx/dt = \omega_0 A \cos \omega_0 t$ slik at $\dot{x}(0) = \omega_0 A$. Newtons 2. lov gir

$$m_e \ddot{x} = F_x = -eE_x = e\partial V/\partial x = -2eV_0 x/a^2,$$

som er ligningen for en enkel harmonisk oscillator, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, med $\omega_0^2 = 2eV_0/m_e a^2$. Banens radius har dermed verdien

$$A = \dot{x}(0)/\omega_0 = \dot{x}(0)\sqrt{m_e a^2/2eV_0} = 1.9 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

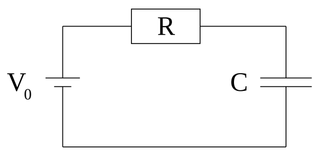
dvs 1.9 μm.



37) Hva er total kapasitans til de fire kondensatorene i figuren? Tallverdiene angir enkeltkapasitanser i enheten nF.

B) 1.7 nF

Parallellkoblingen i midten har total kapasitans 10.0 nF. Seriekobling av 3.0, 10.0 og 7.0 nF blir en total kapasitans $(1/3 + 1/10 + 1/7)^{-1} = 1.7$ nF.



38) En likespenning $V_0 = 9.0$ V kobles ved tidspunktet $t = 0$ til en seriekobling av en motstand $R = 2.0$ kΩ og en kapasitans $C = 3.0$ mF. Hvor lang tid tar det før ladningen på kondensatorplatene har nådd 90% av sin maksimale verdi?

C) 14 s

Ladningen øker eksponentielt med tiden mot sin maksimale verdi, gitt ved $Q_0 = V_0 C$. Tidskonstanten er $\tau = RC = 6.0$ s. Siden $Q(t) = Q_0(1 - \exp(-t/\tau))$, må vi finne den verdien av t som gir $\exp(-t/\tau) = 0.1$, dvs $t = \tau \ln 10 = 6.0 \cdot 2.3 = 14$ s.

---

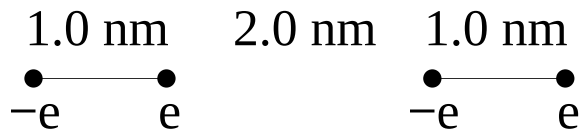
39) I forrige oppgave omdannes elektrisk energi til varme så lenge det går en strøm gjennom motstanden (fra $t = 0$ til $t \to \infty$). Hvor mye?

C) 0.12 J

Det instantane effekttapet i motstanden er $P_R(t) = V_R \cdot I = RI^2$. Strømmen i kretsen er $I(t) = dQ/dt = (V_0/R)\exp(-t/RC)$. Totalt varmetap W blir derfor

$$W = \int_0^\infty P_R(t)dt = (V_0^2/R)\int_0^\infty \exp(-2t/RC).$$

Integralet blir $RC/2$, slik at $W = V_0^2C/2$, som med tallverdier innsatt blir 0.12 J.



40) To identiske og parallelle dipoler ligger på linje, som vist i figuren. Hver dipol består av punktladninger $\pm e$ i innbyrdes avstand 1.0 nm. Hva er netto innbyrdes kraft mellom de to dipolene?

B) 21 pN

Her har vi tiltrekning mellom to par av motsatte ladninger $\pm e$ i innbyrdes avstand hhv 2.0 og 4.0 nm, og frastøtning mellom to par av like ladninger, begge i innbyrdes avstand 3.0 nm:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{2}{3^2}\right) = \frac{13e^2}{576\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

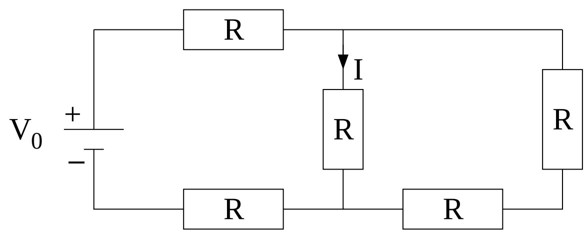
Her er $d = 1.00$ nm. Innsetting av alle tallverdier gir 21 pN.

---

41) Ved temperatur 20°C har kobber resistivitet $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Temperaturkoeffisienten er $\alpha = d\rho/dT = 0.00386$ K^{-1}. Hva er da resistiviteten til kobber ved 60°C?

C) $1.94 \cdot 10^{-8}$ Ωm

$\rho(60) = \rho(20) \cdot (1 + \alpha\Delta t) = 1.68 \cdot 10^{-8} \cdot (1 + 0.00386 \cdot 40) = 1.94 \cdot 10^{-8}$ Ωm.



42) I figuren er $V_0 = 12$ V og $I = 3.0$ A. Hva er da verdien av hver av motstandene R?

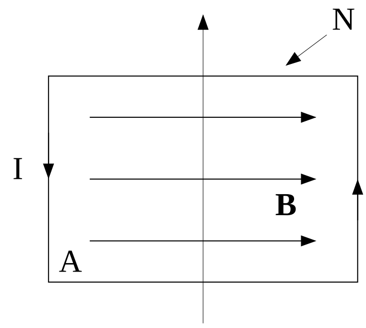
D) 1.0 Ω

Kretsens totale motstand er $R_{\text{tot}} = R + R + (1/R + 1/2R)^{-1} = 8R/3$, slik at total strøm levert av spenningskilden er $I_{\text{tot}} = 3V_0/8R$. Den oppgitte I tilsvarer 2/3 av den totale strømmen, slik at $I = (2/3) \cdot (3V_0/8R) = V_0/4R$. Dermed blir $R = V_0/4I = 12/12 = 1.0$ Ω.

43) Et elektron (med ladning $q = -e$) går i sirkelbane med radius 7.0 mm i et uniformt magnetfelt med feltstyrke 18 mT. Hva er elektronets impuls?

E) $2.0 \cdot 10^{-23}$ kg m/s

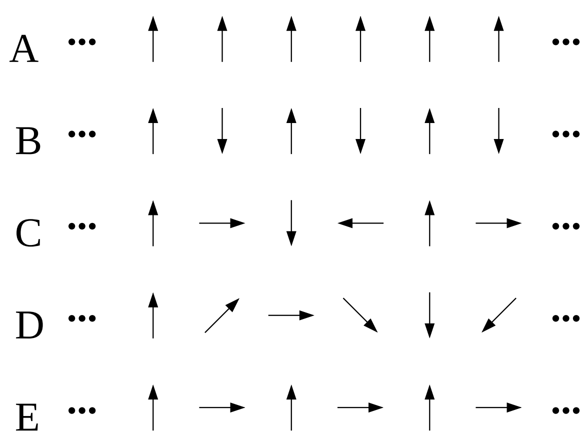
Sirkelbevegelse og Newtons 2. lov gir at $F = evB = m_e v^2/r$, dvs $eB = m_e v/r = p/r$. Dermed er impulsen $p = eBr = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 7.0 \cdot 10^{-3} = 2.0 \cdot 10^{-23}$ kg m/s.



44) En spole med $N = 50$ viklinger og konstant strøm $I = 2.5$ A i spoletråden er plassert i et uniformt magnetfelt med feltstyrke $B = 8.5$ mT. Hver vikling av spoletråden omslutter et rektangulært areal $A = 70$ cm^2. Spolens potensielle energi U avhenger av dens orientering. Hvor stor er forskjellen mellom spolens maksimale og minimale verdi av U?

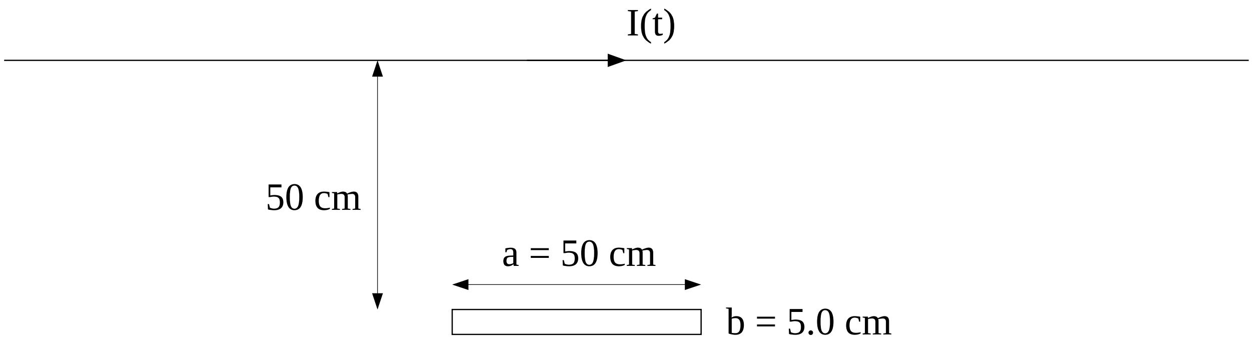
A) 15 mJ

Spolen er en magnetisk dipol med dipolmoment $m = NIA = 50 \cdot 2.5 \cdot 70 \cdot 10^{-4} = 0.875$ Am^2. Den potensielle energien er minimal og lik $-mB$ dersom $\boldsymbol{m}$ og $\boldsymbol{B}$ peker i samme retning, og maksimal og lik $+mB$ dersom $\boldsymbol{m}$ og $\boldsymbol{B}$ peker i motsatt retning. Differansen mellom disse er da $2mB = 2 \cdot 0.875 \cdot 8.5 \cdot 10^{-3} = 0.015$ J = 15 mJ.



45) Atomer med et permanent magnetisk dipolmoment er plassert på rekke og rad slik at de danner en slags "endimensjonal krystall". Hvilken orientering av de atomære magnetiske dipolene vil resultere i lavest mulig potensiell energi? Vi antar her at hvert atom kan betraktes som en bitteliten sirkulær strømsløyfe med tilhørende magnetfelt, og at en gitt magnetisk dipol i all hovedsak påvirkes av magnetfeltet fra sine (to) nærmeste naboer.

Dipoler med vekselvis motsatt orientering, som i figur B, gir lavest mulig potensiell energi, for da er alle dipolmoment $\boldsymbol{m}$ i samme retning som magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ fra de to nabo-dipolene.



46) En lang, rett strømførende leder fører en vekselstrøm $I(t) = I_0 \cos \omega t$ med amplitude $I_0 = 4.6$ A og frekvens $f = \omega/2\pi = 50$ Hz. Ei rektangulær ledersløyfe med dimensjoner $a = 50$ cm (langs den rette lederen) og $b = 5.0$ cm (normalt på den rette lederen) er plassert i avstand 50 cm fra den rette lederen. Hva blir amplituden til den induserte spenningen i ledersløyfa?

D) 14 μV

Siden ledersløyfas bredde $b = 5.0$ cm er mye mindre enn avstanden $x = 50$ cm fra den rette lederen, kan vi med brukbar tilnærming anta at den magnetiske feltstyrken $B(x) = \mu_0 I/2\pi x$ er konstant over hele det omsluttede arealet på $ab = 250$ cm^2. Omsluttet fluks er da omtrent lik

$$\phi(t) = \frac{\mu_0 ab I_0 \cos \omega t}{2\pi x}.$$

Dette gir en indusert spenning i ledersløyfa $V(t) = V_0 \sin \omega t$ med amplitude

$$V_0 = \frac{\mu_0 ab I_0 \omega}{2\pi x} = \frac{\mu_0 ab I_0 f}{x} = 14 \cdot 10^{-6} \text{ V},$$

dvs 14 μV.

---

47) En kondensator med kapasitans 2.5 μF er tilført ladning $\pm 22.5\,\mu$C. Kondensatoren kobles deretter til en spole med induktans 2.5 μH og en motstand med resistans 1.0 Ω, slik at resultatet blir en seriekobling av de tre komponentene. Ladningen på kondensatoren og strømmen i kretsen vil nå variere med tiden. Tilsvarer tidsavhengigheten en dempet svingning, og i så fall, hva blir frekvensen?

D) 55 kHz

Her er $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 4 \cdot 10^5$ s^{-1} og $\gamma = R/2L = 2 \cdot 10^5$ s^{-1}, slik at

$$f = \omega/2\pi = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}/2\pi = 55 \text{ kHz}.$$

---

48) En resonanskrets består av en seriekobling av en motstand, en induktans og en kondensator. Komponentverdiene, med usikkerhet, er som følger:

$$\begin{aligned} R &= (7.00 \pm 0.05)\,\Omega \\ L &= (15.0 \pm 0.1)\,\text{mH} \\ C &= (4.00 \pm 0.05)\,\text{nF} \end{aligned}$$

Hva er relativ usikkerhet, $\Delta Q/Q$, i resonanskretsens Q-faktor? ($Q = \sqrt{L/C}/R$.)

E) 1%

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta Q}{Q} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{2C}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{5}{700}\right)^2 + \left(\frac{1}{300}\right)^2 + \left(\frac{5}{800}\right)^2} \\
&= 0.01,
\end{aligned}$$

dvs 1%.

---

49) En vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \sin \omega t$ med amplitude $V_0 = 311$ V og frekvens $f = \omega/2\pi = 50$ Hz kobles til en kondensator med kapasitans $C = 3.3\ \mu$F. Hva blir amplituden til strømmen i kretsen?

D) 0.32 A

$$I_0 = V_0 \omega C = 2\pi f V_0 C = 2\pi \cdot 50 \cdot 311 \cdot 3.3 \cdot 10^{-6} = 0.32 \text{ A}.$$

---

50) En vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \sin \omega t$ med amplitude $V_0 = 311$ V og frekvens $f = \omega/2\pi = 50$ Hz er koblet til en varmeovn som kan betraktes som en motstand $R = 48.36\ \Omega$. Hvor mye elektrisk energi omdanner ovnen til varme i løpet av ei uke?
E) 168 kWh

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{1}{2} V_0^2 / R = 311^2 / 2 \cdot 48.36 = 1000 \text{ W}.$$

Forbruk av elektrisk energi i løpet av ei uke, som tilsvarer 168 timer, er derfor 168 kWh.
