TFY4104/TFY4115 Fysikk Eksamen 6. desember 2018

Løsningsforslag Oppgave 1 – 25 Mekanikk

1) A: Ingen horisontale krefter på kula, så $a_x = 0$, v_x er konstant, og x øker lineært med tiden t.

2) A: Energibevarelse gir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_1^2 + mga &= \frac{1}{2}mv_2^2 + mgb \\ \Rightarrow v_2 &= \left[v_1^2 + 2g\,(a-b)\right]^{1/2}\end{aligned}$$

3) D: Pianoet står i ro, så total kraft på det er null. Horisontalt påvirkes pianoet av deg, dvs skyvkraften på 700 N, og en motsatt rettet og like stor friksjonskraft fra teppet.

4) E: Impulsbevarelse: $|p_2| = |p_3| = p$. Det gir $K_3/K_2 = (p^2/6m)/(p^2/4m) = 2/3$, slik at $K_2/(K_2 + K_3) = K_2/(5K_2/3) = 3/5 = 60\%$.

5) B: Beltedelen som har kontakt med underlaget står i ro. Øvre horisontale beltedel har dobbelt så stor hastighet som gravemaskinen.

6) E:

$$A = 4\pi r^2 = 15.205\,\mathrm{cm}^2$$

For å anslå usikkerheten i A, kan vi regne ut A med radius hhv 11.1 og 10.9 mm. Dette gir hhv 15.483 og 14.930 cm^2, så vi ser at usikkerheten i A er ca ± 0.3 cm^2. Alternativt, og litt raskere, kan vi si at

$$\Delta A/A = 2\Delta r/r \quad \Rightarrow \quad \Delta A = 2A\Delta r/r \simeq 0.3\ \mathrm{cm}^2$$

7) B:

$$m = \rho V = 7.86\ \mathrm{g/cm}^3 \cdot (4\pi/3) \cdot 1.1\,\mathrm{cm}^3 = 43.8\ \mathrm{g}$$

8) E:

$$I_0/m = 2r^2/5 = 48.4\ \mathrm{mm}^2$$

9) A:

$$K = mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = 7mv^2/10$$

Starthøyde: $y_0 \cdot (1.2^4 - 1.2^2) = 0.6336 y_0$. Dermed:

$$|\Delta U| = K \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{10g \cdot 0.6336 y_0/7} = 149\,\mathrm{cm/s}$$

10) C: Helningsvinkel gitt ved $\tan\theta = dy/dx$, med

$$dy/dx = y_0(4x^3/L^4 - 2x/L^2).$$

I hver ende er $x = \pm 6L/5$ som gir

$$|dy/dx|_{\max} \simeq 4.5y_0/L = 0.45.$$

Det gir en (maksimal) helningsvinkel $\theta_{\max} = \arctan 0.45 = 24°$.

11) A: I banens to bunnpunkter (og det lokale topp-punktet ved $x = 0$) er $dy/dx = 0$: $dy/dx \sim 4x^3/L^4 - 2x/L^2 \sim 4x^2/L^2 - 2 = 0$ for $x = \pm L/\sqrt{2}$. Her er $d^2y/dx^2 = y_0(12x^2/L^4 - 2/L^2) = y_0(6-2)/L^2 = 4y_0/L^2 = 1/\rho$, slik at krumningsradien er $\rho = L^2/4y_0 = 625$ cm.

12) B: Kinetisk energi øker lineært med tiden: $K(t) = A(t - t_0)$. Da er tilført effekt konstant: $P = dK/dt = A$. Dvs, $P = Fv = mav = A$ er konstant. Siden $K = mv^2/2$, vil $v \sim \sqrt{t}$ og $a \sim 1/\sqrt{t}$, og dermed vil $F \sim 1/\sqrt{t}$.

13) C: Energibevarelse gir $kx^2/2 = mv^2/2$, dvs $k = mv^2/x^2 = 0.042 \cdot 0.42^2/0.042^2 = 4.2$ N/m.

14) D: Fra figuren ser vi at $\rho(R) = \rho_0/4$, som betyr at $\alpha = 3/4$.

15) B: Et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr har volum $dV = 4\pi r^2 dr$ (oppgitt), og følgelig masse $dm = \rho(r)dV = \rho_0(1 - \alpha r/R) \cdot 4\pi r^2 dr$. Hele jordas masse bestemmes ved å legge sammen massene til slike tynne kuleskall, fra innerst ($r = 0$) til ytterst ($r = R$):

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \alpha r/R\right) \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi\rho_0 \Big|_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{\alpha r^4}{4R}\right) \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{4R^3}{12} - \frac{3\alpha R^3}{12}\right) \\ &= \frac{\pi(4 - 3\alpha)}{3}\rho_0 R^3. \end{aligned}$$

Altså er $\beta = \pi(4 - 3\alpha)/3$.

16) D: $a = v^2/r = (100/3.6)^2/(250/2\pi) = 19.4$ m/s^2.

17) B: $x(t) = x_0 \sin\omega t$, $v(t) = \omega x_0 \cos\omega t$, $a(t) = -\omega^2 x_0 \sin\omega t$. Her er $x_0 = 3.3$ cm og $\omega^2 x_0 = 9.6$ cm/s^2, slik at $\omega = \sqrt{9.6/3.3} = 1.7$ s^{-1}. Dermed

er maksimal hastighet $\omega x_0 = 5.6$ cm/s.

18) A: N2 for "restraketten" er $u \cdot dm/dt = m \cdot dv/dt$, dvs $dm/m = dv/u$, som integrert gir $\ln(m/m_0) = (v - v_0)/u$, dvs $m = m_0 \exp((v - v_0)/u) = m_0 \exp(-(v - v_0)/|u|)$, ettersom $u < 0$. Med $v - v_0 = 1.4$ km/s, $|u| = 2.6$ km/s og $m_0 = 7.5 \cdot 10^5$ kg, er rakettens masse redusert fra m_0 til $m = 0.584 m_0 = 4.38 \cdot 10^5$ kg ved fartsdoblingen. Dette tilsvarer en massereduksjon på $3.12 \cdot 10^5$ kg. Det forbrukes $0.13 \cdot 10^5$ kg bensin pr sekund. Følgelig har det tatt $3.12/0.13 = 24$ sekunder å doble farten.

19) C: $L = L_b + L_s = mrv + (2/5)mr^2 \cdot v/r = 7mrv/5 = 7 \cdot 0.130 \cdot 0.02625 \cdot 1.0/5 = 4.78 \cdot 10^{-3}$ kg m^2/s (Js).

20) A: Dette er rotasjon med konstant vinkelakselerasjon α bestemt av N2 for rotasjon, $\alpha = \tau/I_0 = Fr/I_0$. Her har vi et tynt kuleskall, og $I_0 = (2/3)mr^2$. Rotert vinkel er dermed $\phi = (1/2)\alpha t^2 = (3F/4mr)t^2 = (3 \cdot 20/4 \cdot 0.0027 \cdot 0.020) \cdot 10^{-6} = 0.278$ radianer $= 16$ grader.

21) D: Med utsving x fra likevekt virker kreftene fra de to fjærene i samme retning, slik at N2 blir $m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$. Da er perioden $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)} = 2\pi\sqrt{0.050/145} = 0.12$ s.

22) A: Eksakt forflytning er $s(t_1) = v_0 t_1 + a t_1^2/2 = 0.01217$ m. Numerisk:
$s_1 = s_0 + v_0 \Delta t = 0.4 \cdot 0.025 = 0.010$ m
Feil i s_1: $0.01217 - 0.010 = 0.00217$ m $\simeq 2.2$ mm.

23) C: Energibevarelse: $mgh = mv^2/2$, slik at $v = \sqrt{2gh} = 27.66$ m/s $= 100$ km/t.

24) A: Vi finner v_y som funksjon av rotert vinkel"ϕ med energibevarelse og figurbetraktning: Vertikal forflytning er $\Delta y = h \sin\phi$, og $v_y = v \cos\phi$. Dermed: $v_y = \sqrt{2gh \sin\phi} \cos\phi$. Maksverdi når $dv_y/d\phi = 0$, eller kanskje litt enklere, når $dv_y^2/d\phi = 0$:

$$dv_y^2/d\phi = 2gh \frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi - \sin^3\phi\right) \sim \cos\phi(1 - 3\sin^2\phi) = 0$$

dersom $\phi = \arcsin(1/\sqrt{3}) = 35$ grader.

25) D: Amplitudereduksjon 0.03 prosent pr periode betyr at $e^{-\gamma T} = 0.9997$. Videre er $Q = \omega_0/\Delta\omega = 2\pi/2\gamma T = \pi/\gamma T$. Dermed: $Q = -\pi/\ln 0.9997 = 10^4$.

Løsningsforslag Oppgave 26 – 50 ElMag

26) C:

$$E = q/4\pi\varepsilon_0 d^2 - q/4\pi\varepsilon_0 (2d)^2 = 3q/16\pi\varepsilon_0 d^2$$

27) B:

$$V = q/4\pi\varepsilon_0 d - q/4\pi\varepsilon_0 (2d) = q/8\pi\varepsilon_0 d$$

28) A: Her sammenlignes $Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ og $2Q/4\pi\varepsilon_0 (2r)^2$, og vi ser at sistnevnte er halvparten så stor som førstnevnte. Dermed blir rett svar 50 V/m.

29) A: De to horisontale trådene tilsvarer positiv ladning λa i posisjon $y = a/2$ og negativ ladning $-\lambda a$ i posisjon $y = -a/2$, dvs et dipolmoment λa^2 i positiv y-retning. De to vertikale tilsvarende et like stort dipolmoment i positiv x-retning. Vektorsummen av disse to blir et totalt dipolmoment diagonalt oppover mot høyre, med absoluttverdi $\sqrt{2}\lambda a^2$.

30) D: Dipolmomentet peker i retning $\hat{x} + \hat{y}$, slik at $\tau \sim (\hat{x} + \hat{y}) \times \hat{z} = -\hat{y} + \hat{x}$.

31) E: En liten ladning $\lambda d\xi$ i posisjon ξ bidrar i posisjon x med feltet $dE = \lambda d\xi / 4\pi\varepsilon_0 (x - \xi)^2$. Totalt felt i x blir da

$$E = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right),$$

som med innsetting av oppgitte tallverdier gir $E = 525$ V/m.

32) A: Dette er to like store men motsatt rettede dipoler, totalt null dipolmoment.

33) D: De to positive ladningene bidrar til sammen med et felt som peker diagonalt oppover mot høyre. Det samme gjør de to negative ladningene, siden bidraget fra ladningen oppe til høyre er større enn bidraget fra ladningen nede til venstre. Alt i alt et felt som peker diagonalt oppover mot høyre.

34) C:

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(-4 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

som med innsetting av oppgitte tallverdier blir -5.2 J.

35) D:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(-4/\sqrt{2} - 4/3\sqrt{2} + 4/\sqrt{10} + 4/\sqrt{10} \right),$$

som med innsetting av oppgitte tallverdier blir -0.84 MV.

36) B: Metallstykket er et ekvipotensial, da $E = 0$ inni metallet og $\boldsymbol{E}$ står normalt på metallets overflate i alle posisjoner på overflaten. Dvs, feltstyrken er ulik null på overflaten av metallstykket.

37) A: Hvert plan bidrar med like stor feltstyrke overalt, med retninger slik:
Positivt plan: Felt oppover på oversiden, nedover på undersiden.
Negativt plan: Omvendte retninger.
Ovenfor alle tre plan er feltet summen av et bidrag oppover og to nedover, i alt et nedover. I rommet mellom det positive planet og det øverste negative planet er feltet summen av tre bidrag nedover, i alt tre nedover. I rommet mellom de to negative planene er feltet igjen summen av to bidrag nedover og et bidrag oppover, i alt et nedover. Og endelig, helt nederst er feltet summen av to bidrag oppover og et nedover, i alt et oppover. Figur A passer bra med dette.

38) C: Her er det bare alternativ C som har riktig enhet. Med litt regning: $E_r = -dV/dr = 2\alpha V_0 r \exp(-\alpha r^2)$, $dE_r/dr \sim \exp(-\alpha r^2)(1 - 2\alpha r^2) = 0$ for $r = 1/\sqrt{2\alpha}$.

39) E: Felt inni skiva: $E = E_0/\varepsilon_r = E_0 - E_i$, dvs $E_i = E_0(1 - 1/\varepsilon_r)$. Dette er det induserte feltet, slik at vi samtidig har $E_i = \sigma_i/\varepsilon_0$, felt fra to ladde plan $\pm\sigma_i$ (ladning pr flateenhet), mellom planene, dvs her inni skiva. Dermed er $\sigma_i = \varepsilon_0 E_0(1 - 1/\varepsilon_r)$, som med gitte tallverdier $E_0 = 55.1$ kV/m og $\varepsilon_r = 4.50$ gir 379 nC/m^2.

40) B: Total motstand: $R/2 + (1/R + 1/(3R/2))^{-1} + 2R = 5R/2 + 3R/5 = 31R/10$. Total strøm: $I = 10V_0/31R = 2.0$ A.

41) C: $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/d = 5.2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2630 \cdot 5.0/0.22 \cdot 10^{-9} = 2.8$ kF.

42) A: Potensialforskjell mellom indre kule og ytre kuleskall (med $a = 5.0$ cm): $V = \int_a^{2a} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(1/a - 1/2a)$. Da er $C = Q/V = 8\pi\varepsilon_0 a = 11$ pF.

43) E: $Q(t) = V_0 C(1 - \exp(-t/RC))$. Hvis $Q = 3V_0 C/4$, er $\exp(-t/RC) = 1/4$, dvs $t = RC \ln 4$ som med gitte verdier blir 61 s.

44) B: Med stasjonære forhold er kondensatorene "ferdig ladet opp", og det går ingen likestrøm gjennom disse. Da er dette en krets med tre seriekoblede motstander R, slik at $I = V_0/3R = 30/3 \cdot 64 = 0.16$ A.

45) E: Magnetfelt fra lang rett leder: $B(x) = \mu_0 I/2\pi x$, der x er avstanden fra lederen. Dermed: $\phi = \int B dA = \int_a^{2a} (\mu_0 I/2\pi x) \cdot a dx = (\mu_0 I a/2\pi) \ln 2$. Her

har vi delt opp omsluttet areal i smale striper med lite areal $dA = adx$. Vi finner $M = \phi/I = \mu_0 a \ln 2/2\pi = 35$ nH.

46) D: Med svak demping er $f \simeq f_0 = \omega_0/2\pi = 1/2\pi\sqrt{LC}$, som med gitte verdier for L og C gir $f = 1.4$ kHz.

47) D: N2: $qv_0B = mv_0^2/r$, dvs $r = mv_0/qB$. En figurbetraktning viser at $\sin\theta = a/r$, slik at $\theta = \arcsin(aqB/mv_0)$, som med gitte tallverdier blir $6.2°$.

48) B: Vinkelen er gitt ved $\tan\phi = B_{||}/B_{\perp}$, med $B_{||} = \sqrt{B_N^2 + B_Ø^2} = 13592$ nT og (oppgitt) $B_{\perp} = 50082$ nT. Dermed: $\phi = \arctan(13592/50082) = 15.2°$.

49) C: Maksimal magnetisering, dvs alle magnetiske dipoler (spinn) i samme retning som det ytre magnetfeltet B, oppnås når B er tilstrekkelig stor. Med B så stor at argumentet x til arctan-funksjonen blir mye større enn 1, blir $\arctan(x) \simeq \pi/2$, slik at maksimal magnetisering er $\pi M_0/2$.

50) C: $F = IhB = (V/R)hB = (vBh/R)hB = vB^2h^2/R$.