Oppgave 1

Kommentar: i denne oppgaven ble de to materialene randomisert, slik at riktig tallsvar avhenger av hvilken variant av oppgaven som ble tilfeldig trukket ut.

To kuler med massetetthet og radius hhv. ρ_1 og r_1, og ρ_2 og r_2. Kulene har samme masse m, som ut i fra definisjonen på massetetthet er gitt ved

$$m = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho_1 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \rho_2$$
$$\frac{r_1}{r_2} = \underline{\underline{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}}}$$

For kuler av kobber/bly blir dette forholdet

$$\begin{aligned}\frac{r_{Cu}}{r_{Pb}} &= \left(\frac{\rho_{Pb}}{\rho_{Cu}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{11,3}{8,96}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1,08 \\ &\approx \underline{\underline{1,1}}\end{aligned}$$

For kuler av aluminium/bly blir dette forholdet

$$\begin{aligned}\frac{r_{Al}}{r_{Pb}} &= \left(\frac{\rho_{Pb}}{\rho_{Al}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{11,3}{2,71}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1,61 \\ &\approx \underline{\underline{1,6}}\end{aligned}$$

For kuler av aluminium/kobber blir forholdet

$$\begin{aligned}\frac{r_{Al}}{r_{Cu}} &= \left(\frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{8,96}{2,71}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1,49 \\ &\approx \underline{\underline{1,5}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

Skal bestemme maks høyde for en stein som kastes loddrett oppover fra bakkenivå med startfart $v_{0y} = 16\,\mathrm{m/s}$ på Månen der tyngdeaks. er $g = -1,6\,\mathrm{m/s^2}$ (med positiv y-retning oppover). Bruker bevegelseslikningen

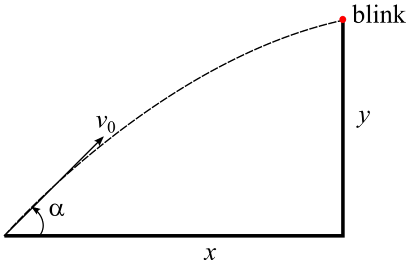
$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2gy \Rightarrow y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g}$$

I punktet med størst høyde er $y = y_{max}$ og $v_y = 0$:

$$
\begin{aligned}
y_{max} &= \frac{0 - (16\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot (-1,6\,\mathrm{m/s^2})} \\
&= \underline{\underline{80\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

Skal bestemme startfarten v_0 slik at kula på figuren under treffer midt i blinken, som befinnre seg i horisontal avstand x og vertikal avstand y, og utskytingsvinkelen er α.



Kombinerer bevegelseslikningene

$$
\begin{aligned}
x &= v_{0x}t = v_0 \cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \\
y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
$$

Setter inn for t i likningen for y:

$$
\begin{aligned}
y &= v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 \\
y &= x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{v_0^2} \\
\frac{1}{2}\frac{gx^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{v_0^2} &= x\tan\alpha - y \\
v_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{gx^2}{\cos^2\alpha\,(x\tan\alpha - y)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(10\,\mathrm{m})^2}{\cos^2 40^\circ\,(10\,\mathrm{m}\tan 40^\circ - 5,0\,\mathrm{m})}} \\
&= 15,7\,\mathrm{m} \\
&\approx \underline{\underline{16\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

Luftmotstanden f på ei kula med tverrsnitt A og fart v er angitt å være gitt ved

$$f = kAv^2.$$

Idet kula har nådd terminalfarten v_t (maks. fallhastighet), er luftmotstanden like stor som tyngdekraften mg på kula:

$$
\begin{aligned}
kAv_t^2 &= mg \\
v_t &= \sqrt{\frac{mg}{kA}}
\end{aligned}
$$

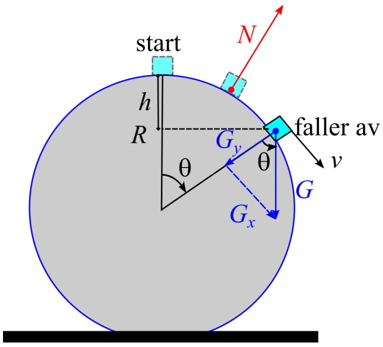
Gitt to kuler: kule A har masse m, radius R og tverrsnitt $A_1 = 4\pi R^2$; kule B har masse $2m$, radius $2R$ og tverrsnitt $A_2 = 4\pi\,(2R)^2 = 16\pi R^2$.

Forholdet mellom terminalfartene til kule B og A:

$$\begin{aligned}\frac{v_{t_B}}{v_{t_A}} &= \sqrt{\frac{\frac{2mg}{k\cdot 16\pi R^2}}{\frac{mg}{k\cdot 4\pi R^2}}}\\ &= \sqrt{\frac{2}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{2}}\\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\end{aligned}$$

Oppgave 5

Figuren under viser kreftene som virker på isbiten mens den sklir ned den friksjonsfrie, kuleformede steinen: tyngden G og normalkraften N. I punktet der steinen faller av, er normalkraften $N = 0$ (i punktet mellom start og punktet der legemet faller av, er kun N inntegnet for å gjøre figuren mer oversiktlig).



Her angir x tangentiell retning og y er radiell retning. Newtons 2. lov i punktet der isbiten faller av (sentripetalakselerasjon):

$$\sum F_y = ma_y = m\frac{v^2}{R}$$

Fra figuren er

$$\sum F_y = G_y = mg\cos\theta$$

I tillegg gir energibevaring, med nullnivå satt i punktet der legemet faller av:

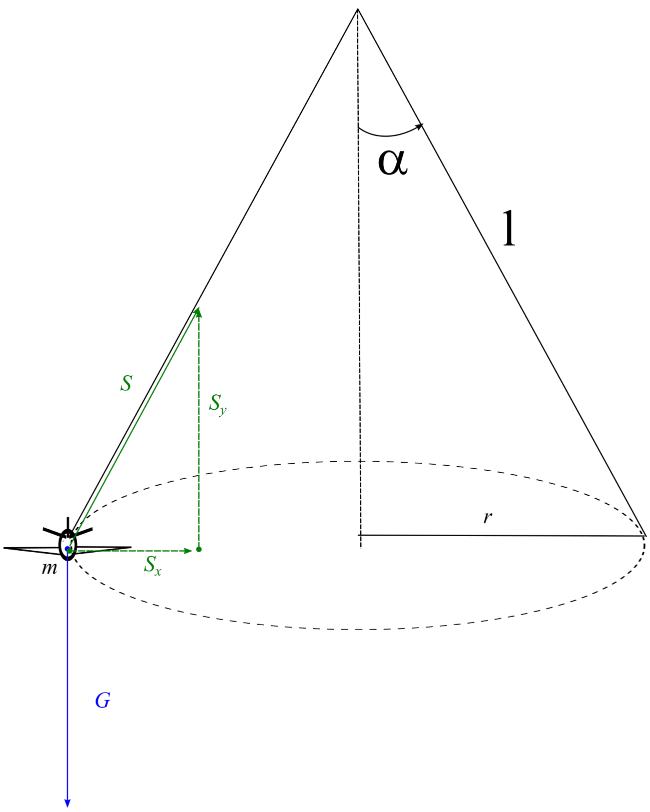
$$\begin{aligned}mgh &= \frac{1}{2}mv^2\\ mg\,(R - R\cos\theta) &= \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(Høydforskjell } h \text{ fra figur)}\\ v^2 &= \underline{2gR\,(1-\cos\theta)}\end{aligned}$$

Setter inn i uttrykk for sentripetalkraft/-akselerasjon:

$$
\begin{aligned}
\sum F_y &= m\frac{v^2}{R} \\
mg\cos\theta &= m\frac{2gR\,(1-\cos\theta)}{R} \\
\cos\theta &= 2\,(1-\cos\theta) && \text{(Forkorter)} \\
3\cos\theta &= 2 \\
\cos\theta &= \frac{2}{3} \\
\theta &= \arccos\frac{2}{3} \\
&= 48,2^\circ \\
&\approx \underline{\underline{48^\circ}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

Figuren under viser kreftene som virker på flyet: snorkraften S og tyngden G:



Ettersom flyet ikke beveger seg i y-retningen, er

$$S_y = mg,$$

Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen gir (via

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= ma_x \\
S_x &= m\cdot\frac{4\pi^2 r}{T^2} && \text{(Formel for sentripetalaks.)}
\end{aligned}
$$

Fra trignometri er dessuten

$$S_x = S_y \tan\alpha = mg\tan\alpha,$$

slik at

$$\begin{aligned} mg\tan\alpha &= m\cdot\frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ \tan\alpha &= \frac{4\pi^2 r}{gT^2} \end{aligned}$$

Fra figurer er radiusen r i sirkelen gitt ved

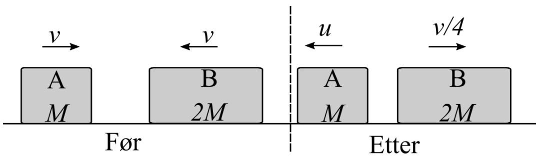
$$r = l\sin\alpha,$$

som gir

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{4\pi^2\cdot l\sin\alpha}{gT^2} \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{4\pi^2\cdot l\sin\alpha}{gT^2} && \text{(Trig. identitet)} \\ \frac{1}{\cos\alpha} &= \frac{4\pi^2\cdot l}{gT^2} && \text{(Forkorter)} \\ \cos\alpha &= \frac{gT^2}{4\pi^2 l} \\ \alpha &= \underline{\underline{\arccos\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 l}\right)}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

Figuren under viser kollisjonen:



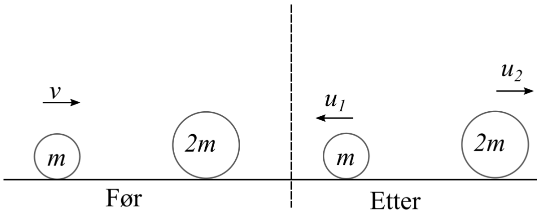
Skal finne sluttfarten u til den letteste steinen. Bevaring av bevegelsesmengde gir (velger positiv retning mot høyre):

$$\begin{aligned} \sum p_{f\phi r} &= \sum p_{etter} \\ Mv + 2M(-v) &= Mu + 2M\cdot\frac{v}{4} \\ -v &= u + \frac{1}{2}v \\ u &= -v - \frac{1}{2}v \\ u &= \underline{\underline{-\frac{3}{2}v}} \end{aligned}$$

Minustegnet signaliserer at steinen beveger seg mot venstre.

Oppgave 8

Figuren under viser situasjonen der to klinkekuler kolliderer i et sentralt, elastisk støt, den ene med masse m og fart v, og den andre med masse $2m$ og i ro. Etter støtet har kulene fart hhv. u_1 og u_2 (størrelsesforholdet mellom de er ikke nødvendigvis slik figuren indikerer):



Bevaring av bevegelsesmengde gir:

$$\begin{aligned}\sum p_{f\o r} &= \sum p_{etter}\\ mv &= mu_1 + 2mu_2\\ v &= \underline{u_1 + 2u_2} \qquad \text{(Forkorter)}\end{aligned}$$

Bevaring av kinetisk energi gir (ettersom støtet er elastisk):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m \cdot u_2^2\\ v^2 &= \underline{u_1^2 + 2u_2^2} \qquad \text{(Forkorter)}\end{aligned}$$

Fra den ene likningen er

$$u_1 = v - 2u_2,$$

som gir

$$\begin{aligned}v^2 &= u_1^2 + 2u_2^2\\ v^2 &= (v-2u_2)^2 + 2u_2^2\\ v^2 &= v^2 - 4vu_2 + 4u_2^2 + 2u_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6u_2^2 - 4u_2 v &= 0\\ 2u_2(3u_2 - 2v) &= 0\end{aligned}$$

Denne har løsningen

$$\begin{aligned}u_2 = 0 &\vee 3u_2 - 2v = 0\\ u_2 = 0 &\vee u_2 = \frac{2}{3}v\end{aligned}$$

Løsningen $u_2 = 0$, dvs. at den største kule ligger i ro etter støtet, er fysisk uakseptabel (da vil den letteste kula "sprette tilbake" med samme fart v som startfarten, men da er ikke bevegelsesmengden bevart). Den eneste fysisk akseptable løsningen her er at

$$u_2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}v}}$$

Oppgave 9

Vi har følgende uttrykk for fartsendringen $\Delta v = v - v_0$ for en rakett som hadde masse m_0 ved fart v_0, og masse m ved fart v:

$$\Delta v = v - v_0 = u \ln \frac{m}{m_0},$$

der u er farten til eksosgassene relativt til raketten.

Dersom raketten starter i ro med $m_0 = 2000\,\text{tonn}$ (slik at $v_0 = 0$) og totalmassen er $m = 1800\,\text{tonn}$ ved sluttfart v (har da forbrent 200 tonndrivstoff), blir sluttfarten v lik

$$\begin{aligned} v &= u \ln \frac{m}{m_0} \\ &= (-5,0\,\text{km/s}) \cdot \ln \frac{1800\,\text{tonn}}{2000\,\text{tonn}} \\ &= 0,527\,\text{km/s} \\ &\approx \underline{\underline{0,53\,\text{km/s}}} \end{aligned}$$

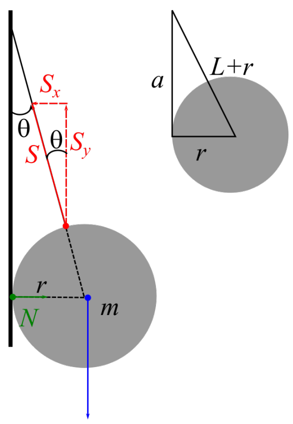
Oppgave 10

Figuren under viser kreftene som virker på ballen: tyngden $G = mg$, snorkrafta S og normalkrafta N fra veggen. N virker horisontalt (dvs. ingen vertikalkomponent) da veggen er friksjonsfri. Da viser figuren at:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_y = mg$$

Da er normalkrafta N gitt ved, fra $\sum F_x$=0:

$$\begin{aligned} N &= S_x \\ &= S_y \tan\theta \\ &= mg \tan\theta. \end{aligned}$$



Ut i fra forholdet mellom snorlengden L og kuleradien r får man, via Pytagoras', at

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{r}{a} \\ &= \frac{r}{\sqrt{(L+r)^2 - r^2}} \\ &= \frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr + r^2 - r^2}} \\ &= \underline{\frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr}}} \end{aligned}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} N &= mg\tan\theta \\ &= \underline{\underline{\frac{mgr}{\sqrt{L^2+2Lr}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 11

En jevntykk skive med masse m, radius r og treghetsmoment $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$ ruller på en bane med form

$$y(x) = y_0\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{1}{4}\right], x \in [-L, L]\,.$$

Her er parametrene $y_0 = 1,20\,\mathrm{m}$ og $L = 1,00\,\mathrm{m}$.

Kula slippes med null startfart fra $x_1 = -L$ og vi skal bestemme banefarten v i $x_2 = -\frac{L}{2}$. Bevaring av mekanisk energi gir:

$$\begin{aligned} mgy\left(x_1\right) &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + mgy\left(x_2\right) \\ mgy\left(x_1\right) &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 + mgy\left(x_2\right) && \text{(Rulling uten gliding: } \omega = \tfrac{v}{r}) \\ mgy\left(x_1\right) &= \frac{3}{4}mv^2 + mgy\left(x_2\right) \\ v &= \underline{\sqrt{\frac{4}{3}\left(y\left(x_1\right) - y\left(x_2\right)\right)g}} \end{aligned}$$

Her er

$$\begin{aligned} y\left(x_1\right) &= y\left(-L\right) \\ &= y_0\left[(-1)^4 - (-1)^2 + \frac{1}{4}\right] \\ &= \underline{\frac{1}{4}y_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\left(x_2\right) &= y\left(-\frac{L}{2}\right) \\ &= y_0\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \\ &= \underline{\frac{1}{16}y_0} \end{aligned}$$

Det gir:

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{4}{3}\left(y\left(x_1\right)-y\left(x_2\right)\right)g} \\
&= \sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}y_0-\frac{1}{16}y_0\right)g} \\
&= \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{16}y_0 g} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}y_0 g} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 1,20\,\mathrm{m}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} \\
&= 1,716\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{1,72\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 12

Finner helningsvinkelen β i endepunktet $x=-L$:

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{dy}{dx} = y'(x) \\
&= y_0\left(\frac{1}{L^4}.4x^3-\frac{1}{L^2}\cdot 2x\right) \\
&= \frac{y_0}{L}\left(4\left(\frac{x}{L}\right)^3-2\frac{x}{L}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \arctan\left[\frac{y_0}{L}\left(4\left(\frac{x}{L}\right)^3-2\frac{x}{L}\right)\right] \\
&= \arctan\left[\frac{y_0}{L}\left(4\left(-1\right)^3-2\left(-1\right)\right)\right] \\
&= \arctan\left(-2\frac{y_0}{L}\right) \\
&= \arctan\left(-2\cdot\frac{1,20\,\mathrm{m}}{1,00\,\mathrm{m}}\right) \\
&= -67,38^\circ \\
&\approx \underline{-67,4^\circ}
\end{aligned}
$$

Absoluttverdien av helningsvinkelen er altså

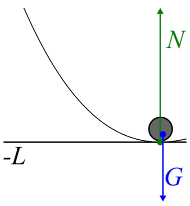
$$
|\beta| = \underline{\underline{67,4^\circ}}
$$

Oppgave 13

Vi skal bestemme normalkrafta N fra underlaget på skiva i det venstre bunnpunktet. Bunnpunktet har en x-koordinat bestemt ved

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0 \\ \frac{y_0}{L}\left(4\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\frac{x}{L}\right) &= 0 && \text{(Fant } y'(x) \text{ tidligere)} \\ \frac{2y_0}{L}\frac{x}{L}\left(2\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right) &= 0 && \text{(Felles faktor utenfor)} \\ 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1 &= 0 \\ \frac{x}{L} &= \underline{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Det venstre bunnpunktet ligger altså i $x = -1/\sqrt{2}$. Normalkrafta på legemet i dette punktet finner vi fra Newtons 2. lov (se figur under):



$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ N - mg &= m\frac{v^2}{R} && (R \text{ er krumningsradien til banen i punktet}) \\ N &= \underline{m\frac{v^2}{R} + mg} \end{aligned}$$

Høydeforskjellen mellom $x_1 = -L$ og bunnpunktet i $x_2 = -1\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_1) - y(x_2) \\ &= \frac{1}{4}y_0 - 0 && \text{(Fant } y(x_1) \text{ tidligere)} \\ &= \underline{\frac{1}{4}y_0} \end{aligned}$$

Finner farten i det laveste punktet (bruker uttrykket fra oppg. 11) i det den slippes med null startfart fra $x_1 = -L$:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{4}{3}\Delta y g} \\ &= \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}y_0 g} \\ &= \underline{\sqrt{\frac{1}{3}y_0 g}} \end{aligned}$$

Krumningsradien R er gitt fra

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''(x)|}{\left(1 + (y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Her er

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{y_0}{L}\left(4\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\frac{x}{L}\right)\right] \\ &= \frac{y_0}{L^2}\left(\frac{4}{L^2}\cdot 3x^2 - 2\right) \\ &= \underline{\frac{y_0}{L^2}\left(12\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\right)} \end{aligned}$$

I bunnpunktet har $y''(x)$ verdien

$$\begin{aligned} y''(x_2) &= \frac{y_0}{L^2}\left(12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\right) \\ &= \underline{4\frac{y_0}{L^2}} \end{aligned}$$

I bunnpunktet er $y'(x) = 0$. Da finnes krumningsradien ved

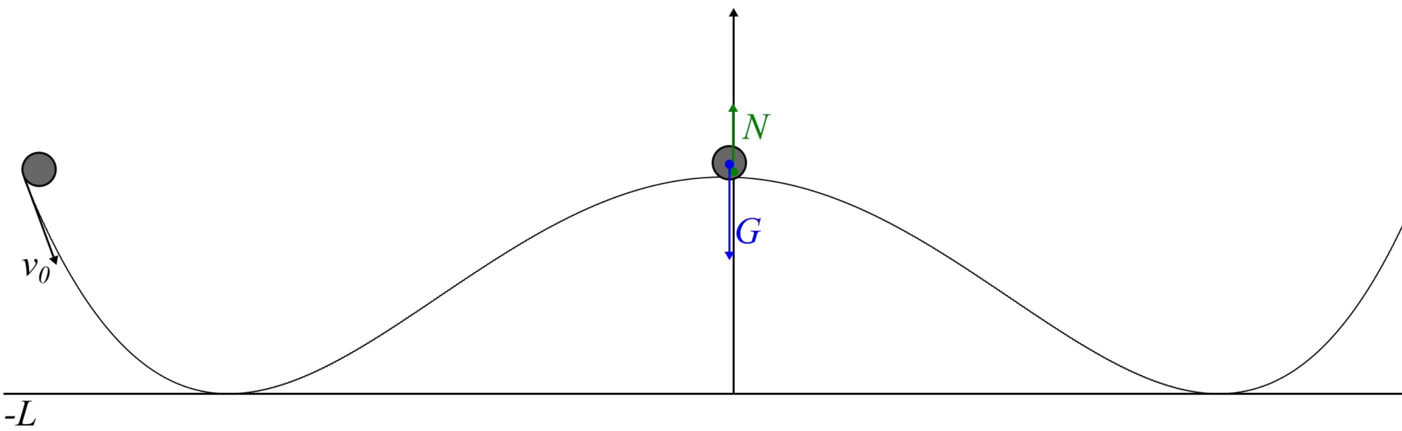
$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= |y''(x_2)| \Rightarrow R = \frac{1}{|y''(x_2)|} \\ R &= \frac{1}{4\frac{y_0}{L^2}} \\ &= \underline{\frac{1}{4}\frac{L^2}{y_0}} \end{aligned}$$

Normalkrafta blir da

$$\begin{aligned} N &= m\frac{v^2}{R} + mg \\ &= m\frac{\frac{1}{3}y_0 g}{\frac{1}{4}\frac{L^2}{y_0}} + mg \\ &= \frac{4}{3}\frac{y_0^2}{L^2}mg + mg \\ &= \left(\frac{4}{3}\frac{y_0^2}{L^2} + 1\right)mg \\ &= \underline{\underline{2,92mg}} \end{aligned}$$

Oppgave 14

Vi skal bestemme den største startfarten v_0 som skiva kan slippes med fra $x_1 = -L$ uten at den mister bakkekontakten i "bakketoppen" $x_2 = 0$. Figuren under viser kreftene på skiva på bakketoppen:



I grensetilfellet, der skiva er i ferd med å miste bakkekontakten, er $N = 0$. Da gir Newtons 2. lov (her er R krumningsradien i $x = 0$):

$$\begin{aligned}\sum F_y &= ma_y = m\frac{v^2}{R} \\ mg - N &= m\frac{v^2}{R} \\ v^2 &= gR \qquad (N=0) \\ v &= \sqrt{gR}\end{aligned}$$

Vi skal bestemme farten v_0 i $x_1 = -L$ for at kula skal få nettopp denne grensefarten i $x_2 = 0$. Men ettersom disse to punktene ligger i samme høyde, og mekanisk energi er bevart, vil farten i toppunktet være den samme som farten i startpunktet:

$$v_0 = v = \sqrt{gR}.$$

For å finne krumningsradien i toppunktet må vi beregne

$$\begin{aligned}y''(0) &= \frac{y_0}{L^2}\left(12\,(0)^2 - 2\right) \\ &= \underline{-2\frac{y_0}{L^2}}\end{aligned}$$

Krumningsradien i $x = 0$ er da gitt fra (også i toppunktet er $y'(x) = 0$)

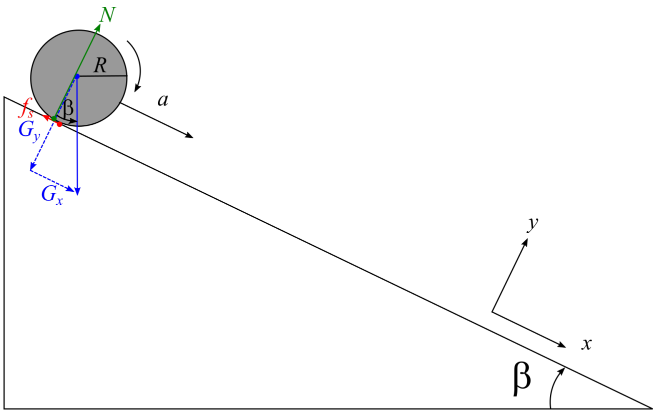
$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= |y''(0)| \Rightarrow R = \frac{1}{|y''(0)|} \\ R &= \frac{1}{|-2\frac{y_0}{L^2}|} \\ &= \underline{\frac{L^2}{2y_0}}\end{aligned}$$

Det gir følgende verdi for v_0:

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{gR} \\ &= \sqrt{g \cdot \frac{L^2}{2y_0}} \\ &= \sqrt{9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \frac{(1,00\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot 1,20\,\mathrm{m}}} \\ &= 2,022\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{2,02\,\mathrm{m/s}}}\end{aligned}$$

Oppgave 15

Figuren under viser situasjonen når legemet ruller ned skråplanet uten å gli. Det er en friksjonskraft f_s mellom legemet og underlaget, i tillegg virker normalkrafta N og tyngden G:



I dette tilfellet gir Newtons 2. lov for bevegelsen til massesenteret at

$$\sum F_x = ma$$
$$mg\sin\beta - f_s = ma$$

Newtons 2. lov for rotasjon gir sammenhengen (her er I treghetsmomentet til sylinderen om massesenteret):

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$f_s \cdot R = I\alpha$$

Ettersom legemet ruller uten å gli, er sammenhengen mellom massesenterets akselerasjon a og vinkelakselerasjonen gitt ved

$$a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} f_s \cdot R &= I \cdot \frac{a}{R} \\ f_s \cdot R &= c \cdot mR^2 \cdot \frac{a}{R} && \text{(Oppgitt treghetsmoment)} \\ f_s &= c \cdot ma \end{aligned}$$

Innsatt i den andre likninga:

$$\begin{aligned} mg\sin\beta - f_s &= ma \\ mg\sin\alpha - c \cdot ma &= ma \\ (1+c)\,ma &= mg\sin\beta \\ a &= \underline{\frac{g\sin\beta}{1+c}} \end{aligned}$$

Oppgave 16

Vi skal bestemme den maksimale skråvinkelen β for at legemet med med masse M, radius R og treghetsmoment $I_0 = c \cdot MR^2$ skal rulle ned skråplanet uten å slure/gli.

Fra forrige oppgave har vi sammenhengen

$$\begin{aligned} f_s &= c \cdot ma \\ &= \underline{\frac{c}{1+c} mg \sin \beta} \qquad \text{(Setter inn uttrykket for } a\text{)} \end{aligned}$$

I tillegg er friksjonskraften gitt ved

$$\begin{aligned} f_s &= \mu N \\ &= \mu G_y \qquad \text{(Se figur i forrige oppgave for dekomponering)} \\ &= \underline{\mu mg \cos \beta} \end{aligned}$$

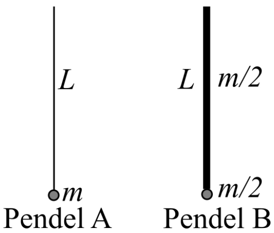
Vi har altså sammenhengen

$$\begin{aligned} \mu mg \cos \beta &= \frac{c}{1+c} mg \sin \beta \\ \frac{\sin \beta}{\cos \beta} &= \frac{1+c}{c} \mu \\ \tan \beta &= \frac{1+c}{c} \mu \\ \beta &= \underline{\underline{\arctan \left(\frac{1+c}{c} \mu \right)}} \end{aligned}$$

Oppgave 17

Innledende kommentar: for å finne hvilken pendel som har lengst svingetid, kan man resonnere uten å regne. Pendel A, som er en matematisk pendel, har massen konsentrert "langt unna" rotasjonsaksen og blir derfor "treg" å svinge; pendel B har mer av massen nærmere rotasjonsaksen. Ut i fra et slikt enkelt resonnement, har **pendel A** lengst svingetid. Under følger en detaljert utregning, for referansens skyld.

Figuren under viser de to pendlene: pendel A, som er en matematisk pendel i form av en "liten" kule (punktpartikkel) med masse m i en masseløs snor med lengde L; pendel B er en fysisk pendel i form av en tynn stang med lengde L og masse $m/2$, med en "liten" kule (punktpartikkel) med masse $m/2$.



Pendel A har ifølge formelarket et treghetsmoment om rotasjonsaksen lik

$$I_A = \underline{mL^2}.$$

Pendel B har et treghetsmoment lik summen av en tynn stang hengslet i ene enden og en punktpartikkel:

$$
\begin{aligned}
I_B &= \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot L^2}_{\text{tynn stang}} + \underbrace{\frac{m}{2} L^2}_{\text{punktpartikkel}} \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) mL^2 \\
&= \underline{\frac{2}{3} mL^2}
\end{aligned}
$$

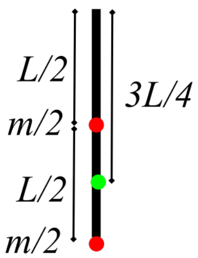
Pendel A har en oppgitt periode fra formelarket på

$$
\underline{\underline{T_A = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}}}
$$

Perioden for pendel B er gitt ved

$$
T_B = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{mgd}},
$$

der d er avstanden mellom massesenteret. Massesenteret til det sammensatte legemet ligger midt mellom massesenteret til hhv. stanga og punktpartikkelen, slik figuren under viser:



Det felles tyngdepunktet (grønt) ligger midt mellom tyngdepunktet til stanga og punktpartikkelen, som har lik masse. Dvs. at

$$
d = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} = \underline{\frac{3}{4} L}
$$

Perioden blir da

$$
\begin{aligned}
T_B &= 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{mgd}} \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{3} mL^2}{mg . \frac{3}{4} L}} \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \frac{L}{g}} \\
&= \underline{\underline{2\pi \sqrt{\frac{8}{9} \frac{L}{g}}}}
\end{aligned}
$$

Sammenlikner man de to periodene, ser man at

$$
T_B = \sqrt{\frac{8}{9}} T_A,
$$

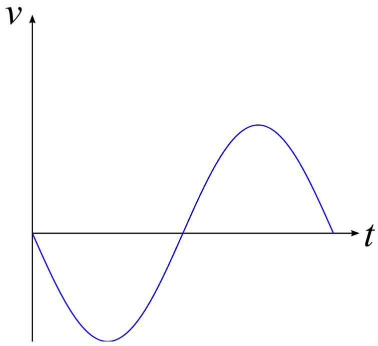
slik at B har **kortere** periode enn A (bruker kortest tid på én svingning). **Pendel A** har lengst svingetid, i tråd med det enkle resonnementet innledningsvis.

Oppgave 18

En kloss er festet til en fjær, og kan svinge uten friksjon på et horisontalt underlag. Klossen dras ut til et maksimalt utslag og slippes med null startfart ved $t = 0$. Vi skal bestemme formen for fartsgrafen til klossen.

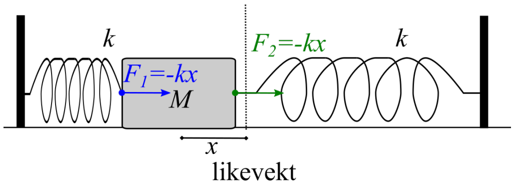
En slik svingning blir lik den fra forrige oppgave, dvs. $x(t) = A\cos(\omega t)$. Vi kan så klart finne $v_x = x'(t) = -A\omega \sin \omega t$ og tegne grafen til denne, men er raskt resonnement er like greit: fartsgrafen får form som en cosinus/sinus. Etter at klossen slippes fra $x = +A$ med null startfart, vil farten være negativ (klossen dras i negativ x-retning), før den stanser opp i endepunktet $x = +A$, og farten igjen blir positiv.

Figuren under viser den eneste fartsgrafen som er i tråd med dette resonnementet:



Oppgave 19

Figuren under viser situasjonen der klossen er trukket en strekning x mot venstre (negativ x-retning). To krefter F_1 og F_2 virker, begge mot høyre (ettersom x selv er negativ, får begge kreftene negative fortegn slik at begge virker i positiv x-retning mot høyre):



Newtons 2. lov på klossen gir

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma_x \\
F_1 + F_2 &= ma_x \\
-kx - kx &= ma_x \\
-2kx &= m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} && \text{(Def. av akselerasjon)} \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -2\frac{k}{m}x \equiv -\omega_0^2 x,
\end{aligned}$$

der $\omega_0^2 = 2\frac{k}{m}$. Dette er en likningen for en harmonisk svingning med vinkelfrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Dette tilsvarer en frekvens

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}}}$$

Oppgave 20

Et system av et lodd som svinger vertikalt i en fjær utsettes for en ytre kraft $F_0 \sin \omega t$, og to forskjellige vinkelfrekvenser $\omega_1 = 2\omega_0$ og $\omega_2 = 4\omega_0$ gir opphav til 2 forskjellige amplituder, hhv. A_1 og A_2. Amplituden for en slik udempet, tvungen svingning som funksjon av vinkelfrekvensen til den ytre krafta er gitt ved

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + b^2\omega^2}}.$$

Her er $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (vinkelfrekvens for fri, udempet svingning), og dempingskonstanten $b = 0$, slik at uttrykket for amplituden blir

$$A = \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}$$

Forholdene mellom amplitudene blir

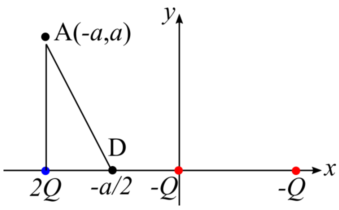
$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{A_2} &= \frac{\frac{F_0}{m\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)}}{\frac{F_0}{m\left(\omega_2^2 - \omega_0^2\right)}} \\
&= \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_1^2 - \omega_0^2} && \text{(Forkorter)} \\
&= \frac{(4\omega_0)^2 - \omega_0^2}{(2\omega_0)^2 - \omega_0^2} \\
&= \frac{15\omega_0^2}{3\omega_0^2} \\
&= \underline{\underline{5}}
\end{aligned}$$

Oppgave 21

Hver elementærpartikkel påvirkes av en elektrisk kraft F_e som fra Newtons 3. lov er like stor på hver av partiklene. Da $\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{1}{m}\sum F$ vil **partikkel 1** med minst masse få størst akselerasjon.

Oppgave 22

Potensialet er høyest der man er nærmest positiv ladning. De eneste kandidatene til punktet med høyest potensial er derfor de to punktene indikert på figuren under:



Potensialet i punkt A:

$$
\begin{aligned}
V_A &= k\frac{2Q}{a} + k\frac{(-Q)}{a\sqrt{2}} + k\frac{(-Q)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{kQ}{a}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\approx \underline{0,85\frac{kQ}{a}}
\end{aligned}
$$

Potensialet i punkt D:

$$
\begin{aligned}
V_D &= k\frac{2Q}{\frac{a}{2}} + k\frac{(-Q)}{\frac{a}{2}} + k\frac{(-Q)}{\frac{3}{2}a} \\
&= k\frac{Q}{a}\left(4 - 2 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \underline{\frac{4}{3}\frac{kQ}{a}}
\end{aligned}
$$

Ser fra dette at $V_D > V_A$,dvs. potensialet er høyest i **punkt D**.

Oppgave 23

Elektrisk feltstyrke $E \sim q/r^2$. Vi har "sterkt" felt "nært" ladninger, og i punkter der feltbidragene fra flere partikler virker i samme retning.

Ser ved inspeksjon at punkt D vil ha størst felt: her er man nærmest den største ladningen $2Q$, og bidragene fra alle ladningene, inkludert de negative, virker alle i samme retning (mot høyre).

Elektrisk feltstyrke har størst absoluttverdi i **punkt D**.

Oppgave 24

To partikler i en viss avstand har potensiell energi U; vi skal bestemme deres potensielle energi når avstanden mellom partiklene halveres.

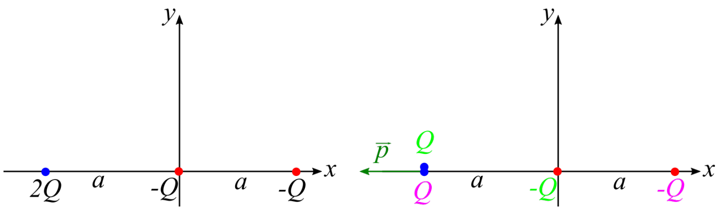
Potensiell energi mellom to ladninger q_1 og q_2 er gitt ved

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r} \sim \frac{1}{r}$$

Hvis avstanden halveres vil derfor U dobles, dvs. pot. energi når avstanden er halvert er $2U$.

Oppgave 25

Gitt ladningskonfigurasjonen på figuren under (figuren til høyre viser ladningen $2Q$ som 2 separate ladninger Q - fargekoding viser hvilke ladningspar som inngår i beregning av dipolmoment):



Dipolmoment går pr. def. fra negativ til positiv ladning, slik at alle bidragene går i negativ x-retning. Absoluttverdiene blir

$$p = Q \cdot a + Q \cdot 2a = \underline{\underline{3Qa}}$$

Oppgave 26

Figuren under viser feltbidragene dE_x og dE_y til det elektriske feltet i origo fra et ladningselement gitt ved (ettersom ladningen er jevnt fordelt på kvartsirkelen)

$$\begin{aligned} dq &= \frac{Q}{\frac{1}{4} \cdot 2\pi R} \cdot ds \\ &= \frac{2Q}{\pi R} \cdot R d\theta \\ &= \underline{\frac{2Q}{\pi} d\theta} \end{aligned}$$

Her er feltbidragene gitt ved

$$dE_x = \frac{kdq}{R^2}\cos\theta,\ dE_y = \frac{kdq}{R^2}\sin\theta$$

De totale bidragene i x- og y-retning fås ved å integrere vinkelen θ over kvartsirkelen, dvs. fra $\theta = 0$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{kdq}{R^2}\cos\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{k}{R^2}\frac{2Q}{\pi}\cos\theta d\theta \\ &= \frac{2kQ}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta \\ &= \frac{2kQ}{\pi R^2}[\sin\theta]_0^{\pi/2} \\ &= \underline{\frac{2kQ}{\pi R^2}} \end{aligned}$$

Utregningen av E_y blir eksakt den samme:

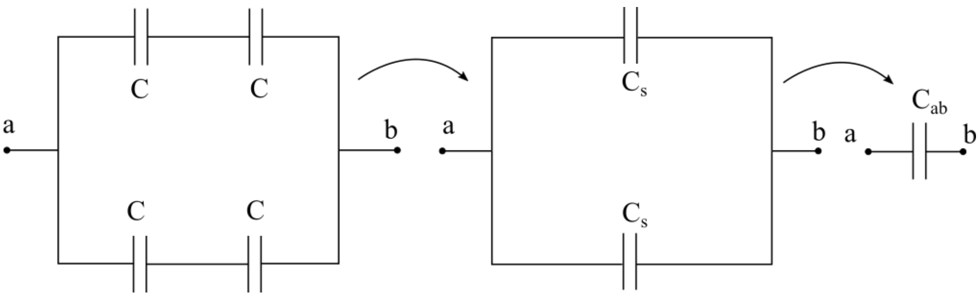
$$\begin{aligned} E_y &= \int dE_y \\ &= \underline{\frac{2kQ}{\pi R^2}} \end{aligned}$$

Absoluttverdien E av det elektriske feltet i origo blir derfor

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2kQ}{\pi R^2}\right)^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}kQ}{\pi R^2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 27

Figuren under viser hvordan kretsen gradvis reduseres til én ekvivalent kapasitans:



Kretsen er altså en parallellkobling av to kondensatorer i serie. Finner ekvivalent kapasitans C_s for hver seriekobling:

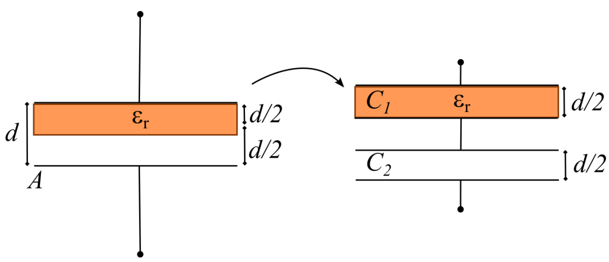
$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \Rightarrow C_s = \underline{\frac{C}{2}}$$

Den ekvivalente kapasitansen C_{ab} mellom punktene a og b blir da kapasitansen for en parallellkobling av identiske kapasitanser;

$$\begin{aligned} C_{ab} &= C_s + C_s \\ &= \frac{C}{2} + \frac{C}{2} \\ &= \underline{\underline{C}} \end{aligned}$$

Oppgave 28

Dette kan ansees som en seriekobling av to kondensatorer: én fylt med isolatoren med dielektrisitetskonstant κ og plategap $d_1 = d/2$, og én luftfylt kondensator med plategap $d_2 = d/2$. Dette er illustrert på figuren under:



Vi starter med å finne kapasitansen C_1 for platekondensatoren fylt med isolatoren; denne er gitt ved

$$\begin{aligned} C_1 &= \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \\ &= \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{\frac{d}{2}} \\ &= \underline{2\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}} \end{aligned}$$

Den luftfylte platekondensatoren har kapasitans C_2 gitt ved

$$\begin{aligned} C_2 &= \varepsilon_0 \frac{A}{d_2} \\ &= \varepsilon_0 \frac{A}{\frac{d}{2}} \\ &= \underline{2\varepsilon_0 \frac{A}{d}} \end{aligned}$$

Den totale kapasitansen C_{tot} for den opprinnelige kondensatoren blir gitt ved (seriekobling av to platekondensatorer)

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{tot}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} && \text{(Ganger teller/nevner med } C_1C_2\text{)} \\ C_{tot} &= \frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d} \cdot 2\varepsilon_0\frac{A}{d}}{2\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d} + 2\varepsilon_0\frac{A}{d}} \\ &= \frac{4\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 2}\varepsilon_0\frac{A}{d} && \text{(Forkorter faktor } \varepsilon_0\tfrac{A}{d}\text{)} \\ & \underline{\underline{\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\varepsilon_0\frac{A}{d}}} && \text{(Forkorter)} \end{aligned}$$

Oppgave 29

En slik blitskrets er en RC-krets med tidskonstant $\tau = RC$. Ladningen på en kondensator under oppladning er gitt ved

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

som ut i fra def. av kapasitans gir at spenningen over kondensatoren som funksjon av tid er

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{C}Q(t) \\ &= \frac{Q_0}{C}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \\ &= \underline{V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}, \end{aligned}$$

der $V_0 = 10\,\mathrm{V}$ er maksimalverdien av spenningen (lik spenningen over spenningskilden).

Tiden det tar før spenningen over kondensatoren er 90 % av maksimalverdien bestemmes fra

$$\begin{aligned}
V(t) &= 0,90V_0 \\
V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) &= 0,90V_0 \\
1 - e^{-t/\tau} &= 0,90 \\
\ln e^{-t/\tau} &= \ln 0,10 \\
t &= -\ln 0,10 \cdot \tau \\
&= -\ln 0,10 \cdot 30\,\Omega \cdot 30 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{F} \\
&= 2,07\,\mathrm{s} \\
&\approx \underline{\underline{2,1\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 30

Gitt 4 identiske motstander med resistans R, og 4 kondensatorer med kapasitans C. Den hhv. største og minste resistansen fås når motstandene kobles i hhv. serie og parallell, og blir her $R_{max} = 4R$ og $R_{min} = \frac{1}{4}R$. Tilsvarende for kondensatorene får man hhv. største og minste kapasitans når de parallell- og seriekobles: $C_{max} = 4C$ og $C_{min} = \frac{1}{4}R$. Ettersom tidskonstanten $\tau = RC$, blir største og minste tidskonstant for en slik RC-krets lik

$$\begin{aligned}
\tau_{max} &= R_{max}C_{max} = \underline{\underline{16RC}} \\
\tau_{min} &= R_{min}C_{min} = \underline{\underline{\frac{1}{16}RC}}
\end{aligned}$$

Oppgave 31

Bevaring av mekanisk energi for elektronet, som har masse m og ladning $-e$: potensiell energi U ved den negative plata går over til kinetisk energi K med fart v ved den positive plata:

$$\begin{aligned}
U &= K \\
eV &= \frac{1}{2}mv^2,
\end{aligned}$$

der V er spenningen mellom kondensatorplatene. Når plateavstanden er d og den elektriske feltstyrken er E er denne gitt ved

$$V = Ed,$$

slik at

$$\begin{aligned}
eEd &= \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eEd}{m}} \\
v &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,30 \cdot 10^{6}\,\mathrm{V/m} \cdot 2,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} \\
&= 1,45 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{1,5 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 32

Først blir ionet akselerert gjennom spenningen V_0. Farten v ved inngangen av magnetfeltet er da gitt fra samme uttrykk som forrige oppgave (med potensiell energi $U = qV_0$):

$$v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}.$$

Når elektronet kommer inn i magnetfeltet, vil det følge en sirkelbane med konstant banefart (ettersom magnetfeltet står vinkelrett på $\vec{v}$, og magnetkrafta er $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Hvis radien i sirkelbanen er R, gir Newtons 2. lov at

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma = m\frac{v^2}{R} \\
qvB &= m\frac{v^2}{R} \\
qB &= \frac{mv}{R} \\
qB &= \frac{m}{R} \cdot \sqrt{\frac{2qV_0}{m}} \\
\sqrt{m} &= \frac{qBR}{\sqrt{2qV_0}} \\
m &= \frac{q^2B^2R^2}{2qV_0} \\
&= \underline{\frac{qB^2R^2}{2V_0}}
\end{aligned}$$

Fra figuren er $R = D/2$, slik at massen blir gitt ved

$$\begin{aligned}
m &= \frac{qB^2\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2V_0} \\
&= \underline{\underline{\frac{qB^2D^2}{8V_0}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 33

En seriekobling av en oppladd kondensator med kapasitans C og en spole med induktans L utgjør en LC-krets som er en harmonisk svingekrets. Ladningen Q på kondensatoren er gitt ved (Q_0 er ladning på kondensatoren ved $t = 0$)

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \phi),$$

der $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.Strømmen $I(t)$ i kretsen er

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{dQ}{dt} \\
&= Q_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi).
\end{aligned}$$

Ettersom kondensatoren er ladd opp til en spenning V_0, er

$$Q_0 = CV_0,$$

slik at

$$I(t) = CV_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) .$$

Strømamplituden er altså

$$\begin{aligned} I_0 &= CV_0\omega_0 \\ &= CV_0 \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= V_0\sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= 12\,\mathrm{V} \cdot \sqrt{\frac{10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{F}}{50\cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}}} \\ &= 5,37\,\mathrm{A} \\ &\approx \underline{\underline{5,4\,\mathrm{A}}} \end{aligned}$$

Oppgave 34

En RL-krets består av en motstand med resistans $R = 1,0\,\Omega$ og en spole med induktans $L = 0,50\,\mathrm{H}$ tilkoblet en likespenningskilde $V_0 = 12\,\mathrm{V}$. Strømmen i en RL-krets er gitt ved

$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

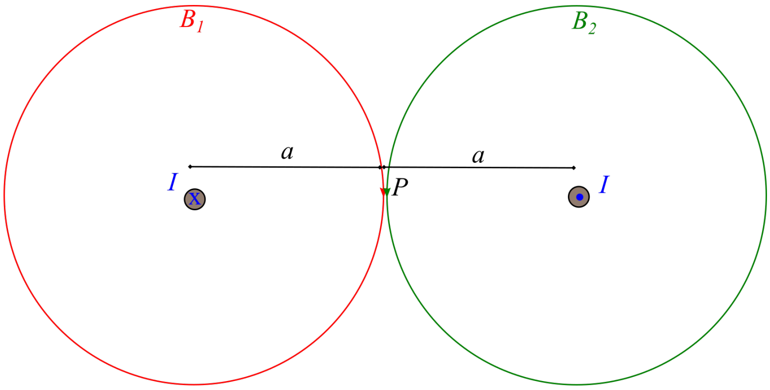
der maksimalverdien I_0 av strømmen er gitt ved $I_0 = V_0/R$ (etterhvert som strømmen i kretsen når sin maksimale verdi, induserer spolen mindre og mindre spenning, slik at all spenningsfallet til slutt ligger over motstanden).

Vi skal finne tiden det tar før strømmen er $I(t) = 10\,\mathrm{A}$. Det gir likningen

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) &= 10\,\mathrm{A} \\ \frac{12\,\mathrm{V}}{1,0\,\Omega}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) &= 10\,\mathrm{A} \\ 1 - e^{-t/\tau} &= \frac{5}{6} \\ e^{-t/\tau} &= \frac{1}{6} \\ t &= -\ln\frac{1}{6}\cdot\tau \\ &= -\ln\frac{1}{6}\cdot\frac{L}{R} && \text{(Tidskonst. for RL-krets)} \\ &= -\ln\frac{1}{6}\cdot\frac{0,50\,\mathrm{H}}{1,0\,\Omega} \\ &= 0,896\,\mathrm{s} \\ &\approx \underline{\underline{0,90\,\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

Oppgave 35

Finner magnetfeltet i punkt P, som ligger midt mellom lederne. Magnetfeltet fra hver leder er konsentriske sirkler med retning bestemt ut i fra høyrehåndsregelen slik figuren under viser (her har strømmen retning normalt på papirplanet):



Magnetfeltbidraget er hhv. B_1og B_2fra de to lederne. Ettersom P ligger midt mellom lederne som fører samme strøm I, er absoluttverdien av bidragene like store og er gitt ved

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

slik at det totale feltet blir

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 \\ &= \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{\pi a}}} \end{aligned}$$

Oppgave 36

Den rette lederen er omgitt med et magnetfelt gitt ved

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y},$$

der y er avstanden fra lederen. Se figuren under.

Fluksen gjennom den kvadratiske sløyfa er gitt ved (ettersom magnetfeltet varierer over sløyfas areal, må vi integrere):

$$\Phi = \int B dA,$$

der flateelementet $dA = ady$ (fra figuren over).

Fluksen idet den nærmeste sløyfekanten har y-koordinat y blir gitt ved

$$\begin{aligned} \Phi &= \int B dA \\ &= \int_y^{y+a} B a dy \\ &= \int_y^{y+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \cdot a dy \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \int_y^{y+a} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \left[\ln y\right]_y^{y+a} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{y+a}{y} \\ &= \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \left(1 + \frac{a}{y}\right)} \end{aligned}$$

Den induserte spenningen i sløyfa er da gitt ved (merk at y er nå en funksjon av t, slik at ln-uttrykket må deriveres med kjerneregel):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln\left(1+\frac{a}{y}\right)\right] \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \cdot \frac{1}{1+\frac{a}{y}} \cdot \left(-\frac{a}{y^2}\right) \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a^2}{y^2+ay} \cdot \frac{dy}{dt}}\end{aligned}$$

Her er $dy/dt = v = 10\,\mathrm{m/s}$, den angitte farten som sløyfa trekkes vekk fra lederen med. På det aktuelle tidspunktet har den nærmeste sidekanten til kvadratet koordinat $y = a$, som gir

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a^2}{y^2+ay} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a^2}{a^2+a^2} \cdot v \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot v \\ &= \underline{\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot v}\end{aligned}$$

Verdien blir

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 1,0\,\mathrm{A}}{4\pi} \cdot 10\,\mathrm{m/s} \\ &= 1,0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{A} \\ &= \underline{\underline{1,0\,\mu\mathrm{A}}}\end{aligned}$$

Oppgave 37

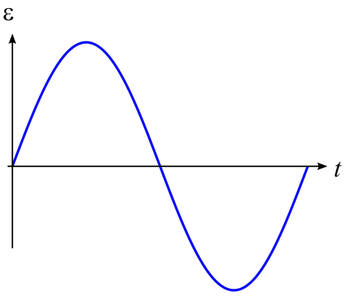
La ϕ være vinkelen mellom sløyfas arealvektor og magnetfeltet $\vec{B}$. Fluksen gjennom sløyfa er gitt ved

$$\begin{aligned}\Phi &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ &= BA\cos\phi \\ &= \underline{BA\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \qquad \text{(Oppgitt at } \phi = \pi/2 \text{ ved } t = 0\text{)}\end{aligned}$$

Indusert spenning som funksjon av tid blir da

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= \underline{BA\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

Følgende graf er i samsvar med dette uttrykket:



Oppgave 38

Fra Kirchoffs 2. lov:

$$\begin{aligned} V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} &= 0 \\ Q &= V_0 C \sin \omega t \end{aligned}$$

Da er strømmen i kretsen gitt ved

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \underline{V_0 C \omega \cos \omega t} \end{aligned}$$

Strømamplituden er altså gitt ved

$$\begin{aligned} I_0 &= V_0 C \omega \\ &= 230\,\mathrm{V} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz} \\ &= 7,23\,\mathrm{A} \\ &\approx \underline{\underline{7,2\,\mathrm{A}}} \end{aligned}$$

Oppgave 39

Denne kretsen kan ansees som en udempet RLC-krets drevet av en ytre vekselspenning $V_0 \sin \omega t$, der altså $R = 0$ slik at dempingsleddet $\gamma = \frac{R}{L} = 0$. Strømmen i en slik krets er gitt ved

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(\omega) \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ &= Q_0(\omega)\, \omega \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Strømamplituden er altså

$$\begin{aligned} I_0(\omega) &= Q_0(\omega)\, \omega \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}} && \text{(Setter inn } \gamma = 0\text{)} \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ &= \underline{\frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\omega^2 - \frac{1}{LC}}} \end{aligned}$$

Løser med hensyn på vinkelfrekvensen ω (forenkler notasjon ved å skrive $I_0(\omega) = I_0$:

$$\begin{aligned} \omega^2 - \frac{1}{LC} &= \frac{V_0}{I_0 L}\omega \\ \omega^2 - \frac{V_0}{I_0 L}\omega - \frac{1}{LC} &= 0 \end{aligned}$$

Dette er en andregradslikning som med oppgitte tall $V_0 = 12\,\mathrm{V}$, $L = 50\,\mathrm{mH}$, $C = 25\,\mathrm{mF}$og ønsket strømamplitude $I_0 = 1,0\,\mathrm{A}$:

$$\omega^2 - 240\omega - 800 = 0,$$

som har løsningen

$$\omega = 243,29\,\mathrm{s}^{-1},$$

slik at frekvensen til spenningskilden blir

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ &= 38,7\,\mathrm{Hz} \\ &\approx \underline{\underline{39\,\mathrm{Hz}}} \end{aligned}$$

Oppgave 40

Transformatoren skal levere en effekt $P = 10\,\mathrm{W}$på sekundærsiden, dvs.

$$P = V_2 I_2$$

Hvis N_1 og N_2 er antall viklinger på hhv. primær- og sekundærsiden, er forholdene mellom spenningene lik

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow V_2 = \underline{\frac{N_2}{N_1} V_1}$$

Det gir:

$$\begin{aligned} P &= \frac{N_2}{N_1} V_1 I_2 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1 I_2}{P} \\ \frac{N_1}{N_2} &= \frac{230\,\mathrm{V} \cdot 0,350\,\mathrm{A}}{10\,\mathrm{W}} \\ &= 8,05 \\ &\approx \underline{\underline{8}} \end{aligned}$$